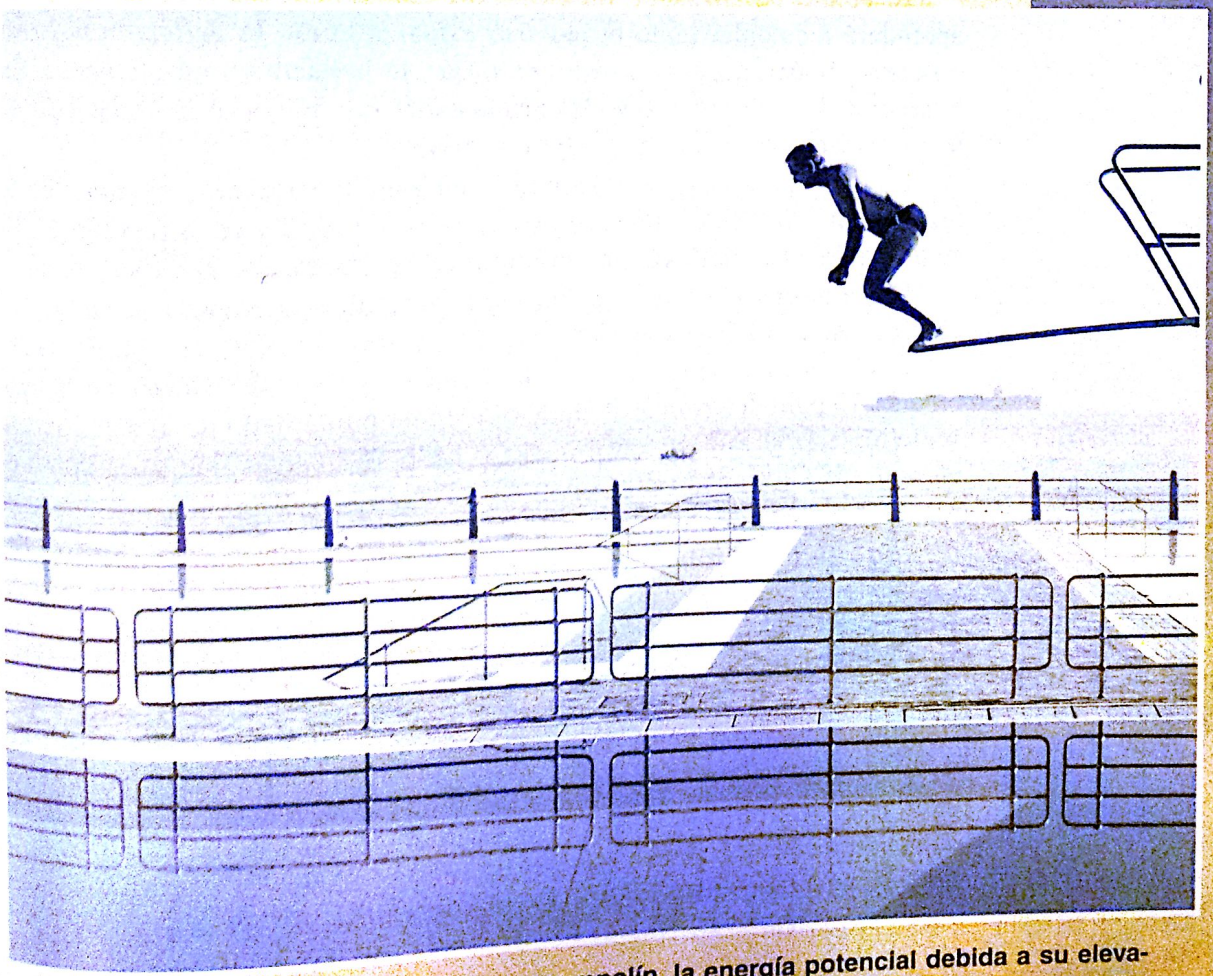
CAPÍTULO

# Métodos de energía

11



Cuando el clavadista desciende sobre el trampolín, la energía potencial debida a su elevación sobre éste se convierte en energía de deformación debido a la flexión de la tabla. En este capítulo se determinarán los esfuerzos normal y cortante que resultan de las cargas de energía.

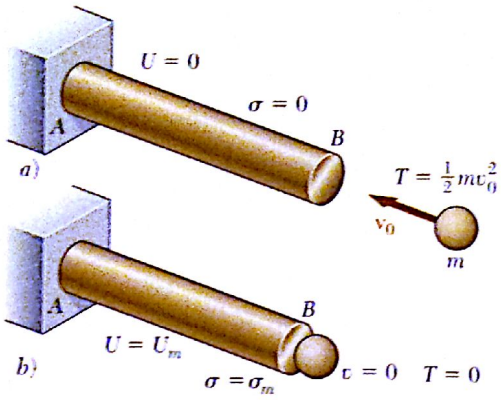



Figura 11.5

El concepto de energía de deformación es particularmente útil en la determinación de los efectos de carga de impacto en estructuras o elementos de máquinas. Considere, por ejemplo, un cuerpo de masa $m$ que se mueve a una velocidad $\mathbf{v}_0$ y que golpea el extremo $B$ de la barra $AB$ (figura 11.5*a*). Despreciando la inercia de los elementos de la barra y suponiendo que no hay disipación de energía durante el impacto, se halla que la máxima energía de deformación $U_m$ adquirida por la barra (figura 11.5*b*) es igual a la energía cinética inicial $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo en movimiento. Es posible determinar el valor $P_m$ de la carga estática que habría producido la misma energía de deformación en la barra, y obtener el valor $\sigma_m$ del máximo esfuerzo en la barra dividiendo $P_m$ entre el área de la sección transversal de la barra.

## 11.3 DENSIDAD DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Como se observó en la sección 2.2, el diagrama carga-deformación para una barra $BC$ depende de la longitud $L$ y del área $A$ de la sección transversal de la barra. La energía de deformación $U$ definida por la ecuación (11.2), por tanto, dependerá también de las dimensiones de la barra. Para eliminar el efecto de tamaño de nuestro análisis y dirigir nuestra atención a las propiedades del material, se considera la energía de deformación por unidad de volumen. Dividiendo la energía de deformación $U$ entre el volumen $V = AL$ de la barra (figura 11.1), y usando la ecuación (11.2), se tiene

$$\frac{U}{V} = \int_0^{x_1} \frac{P}{A}\frac{dx}{L}$$

Recordando que $P/A$ es el esfuerzo normal $\sigma_x$ en la barra, y $x/L$ la deformación normal $\epsilon_x$, se escribe

$$\frac{U}{V} = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x$$

donde $\epsilon_1$ es la deformación correspondiente a la elongación $x_1$. La energía de deformación por unidad de volumen, $U/V$, es la *densidad de energía de deformación* y se designará por la letra $u$. Se tiene, entonces

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x \, d\epsilon_x \qquad (11.4)$$

La densidad de energía de deformación $u$ se expresa en unidades que se obtienen dividiendo unidades de energía por unidades de volumen. En el sistema SI se tendrá $J/m^3$ o sus múltiplos $kJ/m^3$ y $MJ/m^3$; en el sistema americano, será in. · lb/in.$^3$.†

† Debe notarse que 1 $J/m^3$ y 1 Pa son ambos iguales a 1 $N/m^2$, mientras 1 in. · lb/in.$^3$ y 1 psi son iguales a 1 lb/in.$^2$. Así, densidad de energía de deformación y esfuerzo son dimensionalmente iguales y pueden expresarse en las mismas unidades.

Refiriéndose a la figura 11.6, se observa que la densidad de energía de deformación $u$ es igual al área situada bajo la curva esfuerzo-deformación, medida desde $\epsilon_x = 0$ hasta $\epsilon_x = \epsilon_1$. Si se retira la carga del material, el esfuerzo vuelve a cero, pero hay una deformación permanente $\epsilon_p$, y sólo la porción que corresponde al área triangular puede recuperarse. El resto de la energía gastada al deformar el material se disipa en forma de calor.

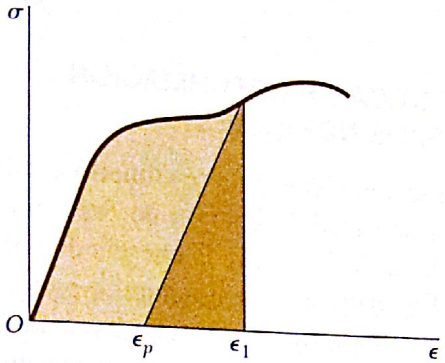


Figura 11.6

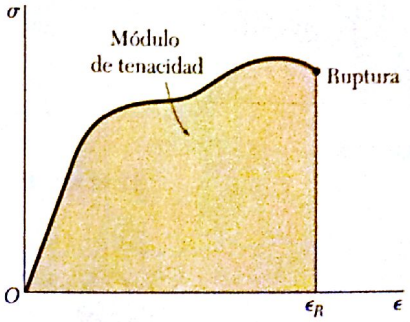


Figura 11.7

El valor de la densidad de energía de deformación obtenida haciendo $\epsilon_1 = \epsilon_R$ en la ecuación (11.4), en donde $\epsilon_R$ es la deformación de ruptura, se conoce como *módulo de tenacidad* del material. Es igual al área situada bajo el diagrama esfuerzo-deformación total (figura 11.7) y representa la energía por unidad de volumen requerida para causar la ruptura. Es claro que la tenacidad del material se relaciona con la ductilidad y con la resistencia última (véase sección 2.3), y que la capacidad de una estructura para resistir un impacto depende de la tenacidad del material usado (figura 11.8).

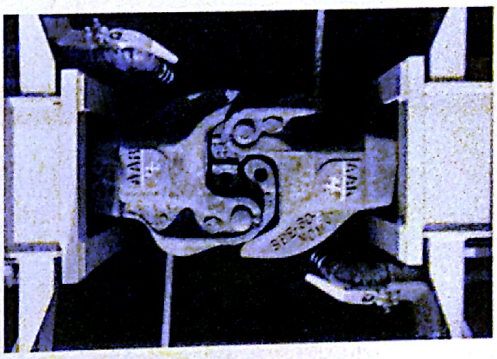


Figura 11.8 El mecanismo de acoplamiento de los ferrocarriles está hecho de acero dúctil con un alto módulo de tenacidad.

Si el esfuerzo $\sigma_x$ permanece dentro del límite de proporcionalidad del material, se aplica la ley de Hooke y puede escribirse

$$\sigma_x = E\epsilon_x \tag{11.5}$$

Sustituyendo $\sigma_x$ de (11.5) en (11.4) se tiene

$$u = \int_0^{\epsilon_1} E\epsilon_x \, d\epsilon_x = \frac{E\epsilon_1^2}{2} \tag{11.6}$$

o, usando la ecuación (11.5) para expresar $\epsilon_1$ en función de $\sigma_1$,

$$u = \frac{\sigma_1^2}{2E} \tag{11.7}$$

El valor $u_Y$ de la densidad de energía de deformación obtenida haciendo $\sigma_1 = \sigma_Y$ en la ecuación (11.7), donde $\sigma_Y$ es el límite de cedencia, se llama *módulo de resiliencia* del material. Se tiene

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \tag{11.8}$$

## EJEMPLO 11.02

Dos barras del mismo material y la misma sección transversal de área $A$ (figura 11.13) sostienen una carga **P** en el punto $B$. Determine la energía de deformación del sistema.

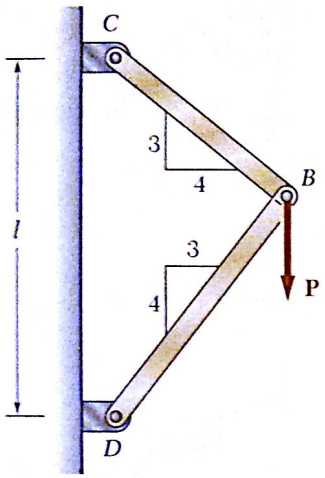



Figura 11.13

Si las fuerzas en los elementos $BC$ y $BD$ son $F_{BC}$ y $F_{BD}$, respectivamente, y recordando la ecuación (11.14), la energía de deformación del sistema se expresa como

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE} \tag{11.16}$$

Pero en la figura 11.13 se observa que

$$BC = 0.6l \qquad BD = 0.8l$$

y en el diagrama de cuerpo libre del pasador $B$ y el correspondiente triángulo de fuerza (figura 11.14), que

$$F_{BC} = +0.6P \qquad F_{BD} = -0.8P$$

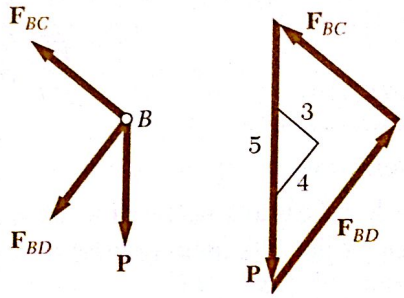



Figura 11.14

Sustituyendo en la ecuación (11.16):

$$U = \frac{P^2l[(0.6)^3 + (0.8)^3]}{2AE} = 0.364\frac{P^2l}{AE}$$

---

**Energía de deformación en flexión.** Considere la viga $AB$, sometida a una carga dada (figura 11.15), y sea $M$ el momento flector a una distancia $x$ del extremo $A$. Despreciando por el momento el efecto de fuerza cortante y teniendo en cuenta sólo $\sigma_x = My/I$, se sustituye esta expresión en la ecuación (11.12) y se escribe

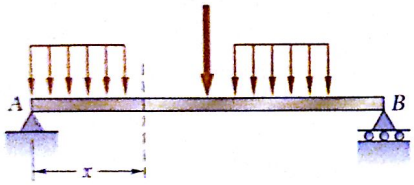



Figura 11.15

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E}dV = \int \frac{M^2y^2}{2EI^2}dV$$

Haciendo $dV = dA\,dx$, en donde $dA$ es un elemento del área transversal y recordando que $M^2/2EI^2$ es función de $x$ únicamente, se tiene

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI^2}\left(\int y^2\,dA\right)dx$$

Recordando que la integral entre paréntesis es el momento de inercia $I$ de la sección transversal alrededor de su eje neutro, se escribe

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \tag{11.17}$$

**EJEMPLO 11.03**

Determine la energía de deformación de la viga prismática volada $AB$ (figura 11.16), teniendo en cuenta sólo el efecto de los esfuerzos normales.

Figura 11.16

El momento flector $M$ a una distancia $x$ del extremo $A$ es $M = -Px$. Sustituyendo en la ecuación (11.17),

$$U = \int_0^L \frac{P^2x^2}{2EI}dx = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

## 11.5 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN ELÁSTICA PARA ESFUERZOS CORTANTES

Cuando un material está sometido a esfuerzo cortante plano $\tau_{xy}$, la densidad de energía de deformación en un punto dado se expresa como

$$u = \int_0^{\gamma_{xy}} \tau_{xy}\, d\gamma_{xy} \qquad (11.18)$$

en donde $\gamma_{xy}$ es la deformación cortante correspondiente a $\tau_{xy}$ (figura 11.17*a*). Se observa que $u$ es el área situada bajo el diagrama esfuerzo cortante-deformación (figura 11.17*b*).

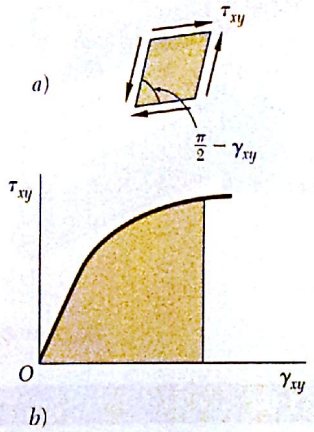


Figura 11.17

Para valores de $\tau_{xy}$ dentro del límite proporcional, se tiene $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$, siendo $G$ el módulo de rigidez del material. Sustituyendo $\tau_{xy}$ en la ecuación (11.18) e integrando,

$$u = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \qquad (11.19)$$

El valor de la energía de deformación $U$ del cuerpo sometido a esfuerzos cortantes planos se obtiene recordando, de la sección 11.4, que

$$u = \frac{dU}{dV} \qquad (11.9)$$

Sustituyendo por $u$, de la ecuación (11.19), en la ecuación (11.9) e integrando ambos miembros

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G}dV \qquad (11.20)$$

Esta expresión define la deformación elástica asociada con las deformaciones de fuerza cortante del cuerpo. De la misma manera que la expresión obtenida en la sección 11.4 para esfuerzos normales uniaxiales, ésta sólo es válida para deformaciones elásticas.

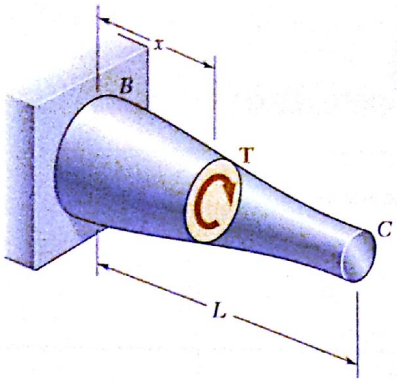



Figura 11.18

**Energía de deformación en la torsión.** Considere a un eje $BC$ de longitud $L$ sometido a uno o varios momentos de torsión. Si $J$ es el momento polar de inercia de la sección transversal situada a una distancia $x$ de $B$ (figura 11.18) y $T$ el par de deformación interno en esa sección, los esfuerzos cortantes en la sección son $\tau_{xy} = T\rho/J$. Sustituyendo por $\tau_{xy}$ en la ecuación (11.20),

$$U = \int \frac{\tau_{xy}^2}{2G} dV = \int \frac{T^2\rho^2}{2GJ^2} dV$$

Haciendo $dV = dA\, dx$, en donde $dA$ es un elemento del área transversal, y observando que $T^2/2GJ^2$ es función de $x$ únicamente, se tiene

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ^2} \left( \int \rho^2\, dA \right) dx$$

Recordando que la integral entre paréntesis es el momento polar de inercia $J$ de la sección transversal, resulta

$$U = \int_0^L \frac{T^2}{2GJ} dx \tag{11.21}$$

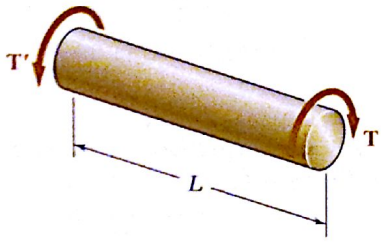



Figura 11.19

En el caso de un eje de sección transversal uniforme, sometido en sus extremos a pares $T$ iguales y opuestos (figura 11.19), la ecuación (11.21) da

$$U = \frac{T^2 L}{2GJ} \tag{11.22}$$

## EJEMPLO 11.04

Un eje circular consta de dos porciones $BC$ y $CD$ de longitud igual y del mismo material, pero de diferentes secciones transversales (figura 11.20). Determine la energía de deformación del eje cuando se somete a un par de torsión **T** en el extremo $D$, expresando el resultado en función de $T$, $L$, $G$, el momento polar de inercia $J$ de la menor sección y la relación $n$ de los dos diámetros.

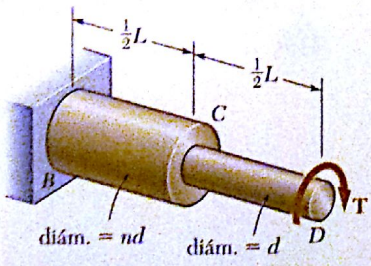



Figura 11.20

Se usa la ecuación (11.22) para calcular la energía de deformación de cada porción del eje y se suma lo obtenido. Observando que el momento polar de inercia de la parte $BC$ es igual a $n^4J$, se escribe

$$U_n = \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2GJ} + \frac{T^2(\frac{1}{2}L)}{2G(n^4J)} = \frac{T^2L}{4GJ}\left(1 + \frac{1}{n^4}\right)$$

o

$$U_n = \frac{1 + n^4}{2n^4} \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.23}$$

Se verifica que, para $n = 1$,

$$U_1 = \frac{T^2L}{2GJ}$$

que es la expresión dada en la ecuación (11.22) para un eje de longitud $L$ y sección transversal constante. También se observa que, cuando $n > 1$, $U_n < U_1$; y cuando $n = 2$, $U_2 = (\frac{17}{32})\, U_1$. Como el esfuerzo cortante máximo ocurre en la porción $CD$ del eje y es proporcional al par de torsión $T$, se nota que para un esfuerzo permisible dado, como ocurrió antes en el caso de la carga axial de una barra, si se aumenta el diámetro de $BC$ hay una *disminución* de la capacidad del eje para absorber energía.

**Energía de deformación bajo carga transversal.** En la sección 11.4 se obtuvo una expresión para la energía de deformación de una viga bajo carga transversal. Sin embargo, al deducir esa expresión se tuvo en cuenta sólo el efecto de los esfuerzos normales debido a flexión y se despreció el efecto de los esfuerzos cortantes. En el ejemplo 11.05 se tomarán en cuenta ambos tipos de esfuerzos.

## EJEMPLO 11.05

Determine la energía de deformación del voladizo rectangular $AB$ (figura 11.21) teniendo en cuenta tanto los esfuerzos normales como los esfuerzos cortantes.

Recuerde, del ejemplo 11.03, que la energía de deformación debido a $\sigma_x$ es

$$U_\sigma = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Para hallar la energía $U_\tau$ debida a los esfuerzos cortantes $\tau_{xy}$, se retoma la ecuación (6.9) de la sección 6.4 y se tiene que, para una viga de sección rectangular de ancho $b$ y profundidad $h$,

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{V}{A}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) = \frac{3}{2}\frac{P}{bh}\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$$

Sustituyendo $\tau_{xy}$ en la ecuación (11.20),

$$U_\tau = \frac{1}{2G}\left(\frac{3}{2}\frac{P}{bh}\right)^2 \int\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)^2 dV$$

o, haciendo $dV = b\,dy\,dx$ y simplificando

$$U_\tau = \frac{9P^2}{8Gbh^2}\int_{-c}^{c}\left(1 - 2\frac{y^2}{c^2} + \frac{y^4}{c^4}\right)dy\int_0^L dx$$

Integrando y recordando que $c = h/2$, se tiene

$$U_\tau = \frac{9P^2L}{8Gbh^2}\left[y - \frac{2}{3}\frac{y^3}{c^2} + \frac{1}{5}\frac{y^5}{c^4}\right]_{-c}^{+c} = \frac{3P^2L}{5Gbh} = \frac{3P^2L}{5GA}$$

La energía de deformación total de la viga es

$$U = U_\sigma + U_\tau = \frac{P^2L^3}{6EI} + \frac{3P^2L}{5GA}$$

o, como $I/A = h^2/12$ y factorizando $U_\sigma$,

$$U = \frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = U_\sigma\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) \qquad (11.24)$$

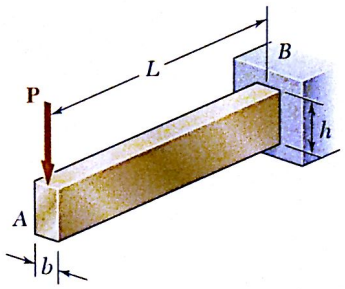


Figura 11.21

Recordando de la sección 2.14 que $G \geq E/3$, se concluye que el paréntesis en la expresión obtenida es menor que $1 + 0.9(h/L)^2$ y que el error relativo es menor que $0.9(h/L)^2$ cuando se desprecia el efecto de la fuerza cortante. Para una viga con una relación $h/L$ menor que $\frac{1}{10}$, el error porcentual es menor que 0.9%. Es, por tanto, costumbre en la práctica de la ingeniería despreciar el efecto de la fuerza cortante al calcular la energía de deformación en vigas esbeltas.

## 11.6 ENERGÍA DE DEFORMACIÓN PARA UN ESTADO GENERAL DE ESFUERZOS

En las secciones precedentes se estudió la energía de deformación de un cuerpo tanto en estado de esfuerzo uniaxial (sección 11.4) como en estado de esfuerzo cortante plano (sección 11.5). En el caso de un cuerpo en estado general de esfuerzo caracterizado por seis componentes del esfuerzo $\sigma_x$, $\sigma_y$, $\sigma_z$, $\tau_{xy}$, $\tau_{yz}$ y $\tau_{zx}$, la densidad de energía de deformación se obtiene, junto con otras cuatro expresiones que se hallan permutando los subíndices, sumando la expresión dada en las ecuaciones (11.10) y (11.18).

En el caso de la deformación elástica de un cuerpo isotrópico, cada una de las seis relaciones esfuerzo-deformación incluidas es lineal, y la densidad de energía de deformación se expresa como:

$$u = \tfrac{1}{2}(\sigma_x\epsilon_x + \sigma_y\epsilon_y + \sigma_z\epsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{11.25}$$

Recordando las relaciones (2.38) obtenidas en la sección 2.14 y sustituyendo para las componentes de deformación en (11.25), se tiene, para el estado más general de esfuerzo en un punto determinado de un cuerpo elástico isotrópico,

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)] + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \tag{11.26}$$

Si los ejes principales en un punto dado se usan como ejes coordenados, los esfuerzos cortantes se anulan y la ecuación (11.26) se reduce a

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a)] \tag{11.27}$$

donde $\sigma_a$, $\sigma_b$ y $\sigma_c$ son los esfuerzos principales en el punto dado.

Recuerde, de la sección 7.7, que uno de los criterios usados para predecir si un estado de esfuerzo dado hará fluir un material dúctil, llamado el criterio de la máxima energía de distorsión, se basa en el cálculo de la energía por unidad de volumen asociado con la distorsión, o cambio en la forma de ese material. Se intentará, entonces, dividir la densidad de energía de deformación $u$ en un punto dado en dos partes; una, $u_v$, asociada con un cambio de volumen del material en ese punto, y otra parte $u_d$, asociada con la distorsión o cambio de forma del material, en el mismo punto. Se escribe

$$u = u_v + u_d \tag{11.28}$$

Para calcular $u_v$ y $u_d$, se introducirá el concepto de *valor medio* $\overline{\sigma}$ de los esfuerzos principales en el punto considerado,

$$\overline{\sigma} = \frac{\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c}{3} \tag{11.29}$$

y

$$\sigma_a = \overline{\sigma} + \sigma_a' \qquad \sigma_b = \overline{\sigma} + \sigma_b' \qquad \sigma_c = \overline{\sigma} + \sigma_c' \tag{11.30}$$

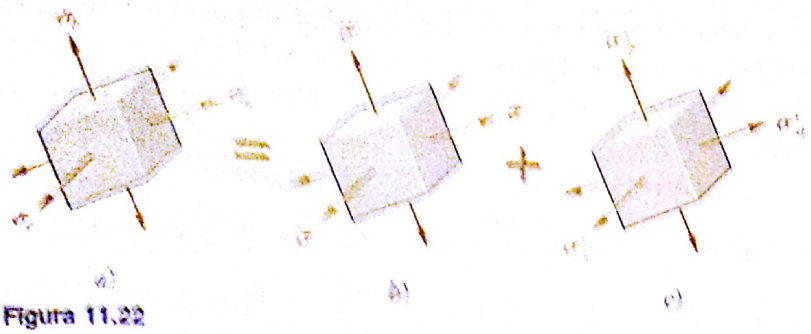


Figura 11.22

Así, el estado dado de esfuerzos (figura 11.22*a*) puede obtenerse por superposiciones de los estados de esfuerzo de las figuras 11.22*b* y *c*. Note que el estado de esfuerzo de la figura 11.22*b* tiende a cambiar el volumen del elemento de material, pero no su forma, ya que todas las caras están sometidas al mismo esfuerzo $\overline{\sigma}$. Por otra parte, se tiene de las ecuaciones (11.29) y (11.30) que

$$\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c = 0 \tag{11.31}$$

lo que indica que algunos de los esfuerzos mostrados en la figura 11.22*c* son tensiones y otros son compresiones. En consecuencia, este estado de esfuerzo tiende a cambiar la forma del elemento. Sin embargo, no tiende a cambiar su volumen. Ciertamente, en la ecuación (2.31) de la sección 2.13, se notó que la dilatación $e$ (cambio de volumen por unidad de volumen) causada por este estado de esfuerzos es

$$e = \frac{1 - 2\nu}{E}(\sigma'_a + \sigma'_b + \sigma'_c)$$

o, $e = 0$, a la luz de la ecuación (11.31). De estas observaciones se concluye que la porción $u_v$ de la densidad de energía de deformación debe asociarse con el estado de esfuerzos de la figura 11.22*b*, mientras que la porción $u_d$ lo está con el estado de la figura 11.22*c*.

Se sigue que la porción $u_v$ de la densidad de energía de deformación, correspondiente a un cambio en volumen del elemento, puede obtenerse sustituyendo $\overline{\sigma}$ por cada uno de los esfuerzos principales en la ecuación (11.27). Se tiene

$$u_v = \frac{1}{2E}[3\overline{\sigma}^2 - 2\nu(3\overline{\sigma}^2)] = \frac{3(1 - 2\nu)}{2E}\overline{\sigma}^2$$

o, retomando la ecuación (11.29),

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \tag{11.32}$$

Para obtener la porción $u_d$ de la densidad de energía de deformación, correspondiente a la distorsión del elemento, se resuelve la ecuación (11.28) para $u_d$ y se sustituye por $u$ y $u_v$ en las ecuaciones (11.27) y (11.32), respectivamente. Se escribe

$$u_d = u - u_v = \frac{1}{6E}[3(\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2) - 6\nu(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a) - (1 - 2\nu)(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2]$$

Desarrollando el cuadrado y reordenando los términos,

$$u_d = \frac{1 + \nu}{6E}[(\sigma_a^2 - 2\sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) + (\sigma_b^2 - 2\sigma_b\sigma_c + \sigma_c^2) + (\sigma_c^2 - 2\sigma_c\sigma_a + \sigma_a^2)]$$

Puesto que cada paréntesis interior es un cuadrado perfecto y recordando, en la ecuación (2.43) de la sección 2.15, que el primer coeficiente es igual a $1/12G$, se obtiene la siguiente expresión para la porción $u_d$ de la densidad de energía de deformación, es decir, para la energía de distorsión por unidad de volumen,

$$u_d = \frac{1}{12G}[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2] \qquad (11.33)$$

En el caso de *esfuerzo plano* y suponiendo que el eje $c$ es perpendicular al plano de esfuerzo, se tiene $\sigma_c = 0$ y la ecuación (11.33) se reduce a

$$u_d = \frac{1}{6G}(\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2) \qquad (11.34)$$

Considerando el caso particular de una probeta de laboratorio sometido a tensiones, se observa que, en la cedencia, $\sigma_a = \sigma_Y$, $\sigma_b = 0$, y por tanto $(u_d)_Y = \sigma_Y^2/6G$. El criterio de la máxima energía de distorsión para esfuerzo plano indica que un estado dado de esfuerzo es seguro siempre que $u_d < (u_d)_Y$ o, sustituyendo $u_d$ de la ecuación (11.34), siempre que

$$\sigma_a^2 - \sigma_a\sigma_b + \sigma_b^2 < \sigma_Y^2 \qquad (7.26)$$

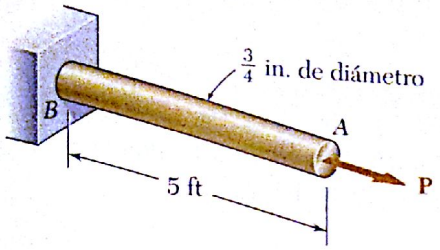
que es la condición mencionada en la sección 7.7 y representada gráficamente por la elipse de la figura 7.41. En el caso de un estado general de esfuerzos, debe usarse la expresión (11.33) obtenida para $u_d$. El criterio de la máxima energía de distorsión se expresa entonces por la condición

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 < 2\sigma_Y^2 \qquad (11.35)$$

que indica que un estado de esfuerzo dado es seguro si el punto de coordenadas $\sigma_a$, $\sigma_b$, $\sigma_c$ se localiza dentro de la superficie definida por la ecuación

$$(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2 = 2\sigma_Y^2 \qquad (11.36)$$

Esta superficie es un cilindro de radio $\sqrt{2/3}\,\sigma_Y$ con eje de simetría que forma ángulos iguales con los tres ejes principales de esfuerzo.




## PROBLEMA MODELO 11.1

Durante una operación industrial de rutina, la barra $AB$ debe adquirir una energía de deformación elástica de 120 in. · lb. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el límite de cedencia requerido del acero, si el factor de seguridad contra la deformación permanente es cinco.

### SOLUCIÓN

**Factor de seguridad.** Como se requiere un factor de seguridad de cinco, la barra debe diseñarse para una energía de deformación de

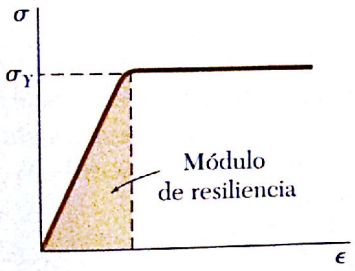
$$U = 5(120 \text{ in.} \cdot \text{lb}) = 600 \text{ in.} \cdot \text{lb}$$

**Densidad de energía de deformación.** El volumen de la barra es

$$V = AL = \frac{\pi}{4}(0.75 \text{ in.})^2(60 \text{ in.}) = 26.5 \text{ in.}^3$$

Como la barra es de sección constante, la densidad de energía de deformación es

$$u = \frac{U}{V} = \frac{600 \text{ in.} \cdot \text{lb}}{26.5 \text{ in.}^3} = 22.6 \text{ in.} \cdot \text{lb/in.}^3$$

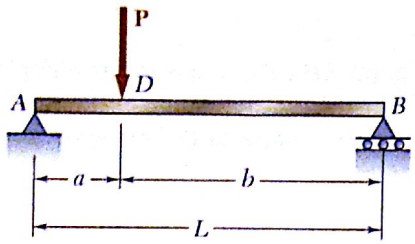



**Límite de cedencia.** Recuerde que el módulo de resiliencia es igual a la densidad de energía de deformación cuando el máximo esfuerzo es igual a $\sigma_Y$. Usando la ecuación (11.8) se escribe:

$$u = \frac{\sigma_Y^2}{2E}$$

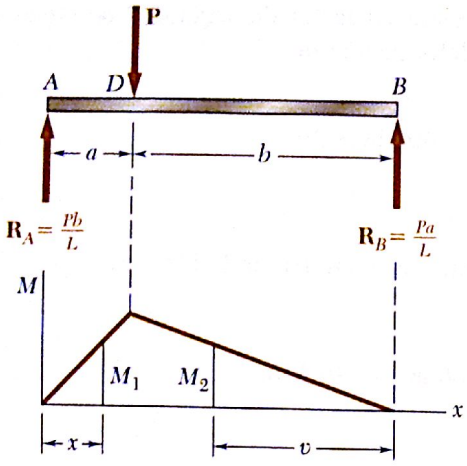
$$22.6 \text{ in.} \cdot \text{lb/in.}^3 = \frac{\sigma_Y^2}{2(29 \times 10^6 \text{ psi})} \qquad \sigma_Y = 36.2 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***Comentario.*** Es importante notar que, como las cargas de energía no están relacionadas linealmente con los esfuerzos que producen, los factores de seguridad asociados con cargas de energía deben aplicarse a las cargas de energía y no a los esfuerzos.




## PROBLEMA MODELO 11.2

*a*) Considerando sólo el efecto de esfuerzos normales debidos a la flexión, determine la energía de deformación de la viga prismática $AB$ para la carga mostrada en la figura. *b*) Evalúe la energía de deformación, sabiendo que la viga es una W10 × 45, $P = 40$ kips, $L = 12$ ft, $a = 3$ ft, $b = 9$ ft y $E = 29 \times 10^6$ psi.




### SOLUCIÓN

**Momento flector.** Usando el diagrama de cuerpo libre de toda la viga, se determinan las reacciones

$$\mathbf{R}_A = \frac{Pb}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{Pa}{L}\uparrow$$

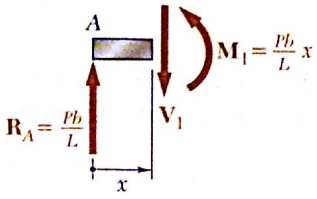
Para la porción $AD$ de la viga, el momento flector es

$$M_1 = \frac{Pb}{L}x$$

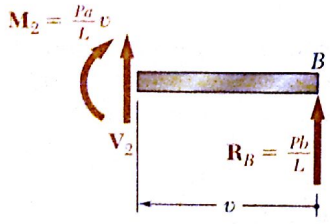
Para la porción $DB$, se observa que el momento flector a una distancia $v$ del extremo $B$ es

$$M_2 = \frac{Pa}{L}v$$

Desde $A$ a $D$:




Desde $B$ a $D$:




***a)* Energía de deformación.** Puesto que la energía de deformación es una cantidad escalar, se añade la energía de deformación de la porción $AD$ a la de la porción $DB$ para obtener la energía de deformación total de la viga. Usando la ecuación (11.17),

$$\begin{aligned} U &= U_{AD} + U_{DB} \\ &= \int_0^a \frac{M_1^2}{2EI}\,dx + \int_0^b \frac{M_2^2}{2EI}\,dv \\ &= \frac{1}{2EI}\int_0^a \left(\frac{Pb}{L}x\right)^2 dx + \frac{1}{2EI}\int_0^b \left(\frac{Pa}{L}v\right)^2 dv \\ &= \frac{1}{2EI}\frac{P^2}{L^2}\left(\frac{b^2a^3}{3} + \frac{a^2b^3}{3}\right) = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL^2}(a+b) \end{aligned}$$

o, como $(a + b) = L$,

$$U = \frac{P^2a^2b^2}{6EIL} \blacktriangleleft$$

***b)* Cálculo de la energía de deformación.** El momento de inercia de una sección de acero laminado W10 × 45 se obtiene del apéndice C y los datos dados se repiten usando unidades de kips y pulgadas.

$P = 40$ kips
$a = 3$ ft $= 36$ in.
$E = 29 \times 10^6$ psi $= 29 \times 10^3$ ksi
$L = 12$ ft $= 144$ in.
$b = 9$ ft $= 108$ in.
$I = 248$ in.$^4$

Sustituyendo en la expresión para $U$,

$$U = \frac{(40 \text{ kips})^2(36 \text{ in.})^2(108 \text{ in.})^2}{6(29 \times 10^3 \text{ ksi})(248 \text{ in.}^4)(144 \text{ in.})} \qquad U = 3.89 \text{ in.} \cdot \text{kips} \blacktriangleleft$$

# PROBLEMAS

**11.1** Determine el módulo de resiliencia para las siguientes aleaciones de aluminio:

*a*) 1100-H14: $E = 70$ GPa $\sigma_Y = 55$ MPa
*b*) 2014-T6 $E = 72$ GPa: $\sigma_Y = 220$ MPa
*c*) 6061-T6 $E = 69$ GPa: $\sigma_Y = 150$ MPa

**11.2** Determine el módulo de resiliencia para cada uno de los siguientes grados de acero estructural:

*a*) ASTM A709 Grade 50: $\sigma_Y = 50$ ksi
*b*) ASTM A913 Grade 65: $\sigma_Y = 65$ ksi
*c*) ASTM A709 Grade 100: $\sigma_Y = 100$ ksi

***11.3*** Determine el módulo de resiliencia para las siguientes aleaciones:

*a*) Titanio: $E = 16.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 120$ ksi
*b*) Magnesio: $E = 6.5 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 29$ ksi
*c*) Cuproníquel (endurecido) $E = 20 \times 10^6$ psi $\sigma_Y = 16$ ksi

**11.4** Determine el módulo de resiliencia para los siguientes metales:

*a*) Acero inoxidable
AISI 302 (endurecido): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 260$ MPa
*b*) Acero inoxidable 2014-T6
AISI 302 (laminado en frío): $E = 190$ GPa $\sigma_Y = 520$ MPa
*c*) Hierro fundido maleable $E = 165$ GPa $\sigma_Y = 230$ MPa

**11.5** El diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante la prueba de una probeta de acero estructural sometida a tensión. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

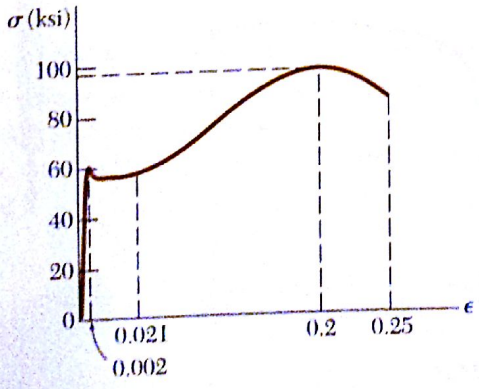



**Figura P11.5**

**11.6** El diagrama esfuerzo-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante la prueba de una aleación de aluminio sometida a tensión. Si $E = 72$ GPa, *a*) determine el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

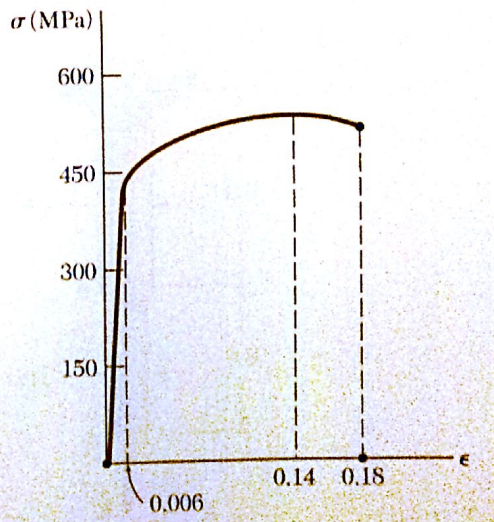



**Figura P11.6**

**11.7** El diagrama carga-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante una prueba a tensión de una muestra de acero estructural. Si el área transversal de la probeta era de 250 $mm^2$, y la deformación se midió con una galga de 500 mm de longitud, determine *a*) el módulo de resiliencia del acero, *b*) el módulo de tenacidad del acero.

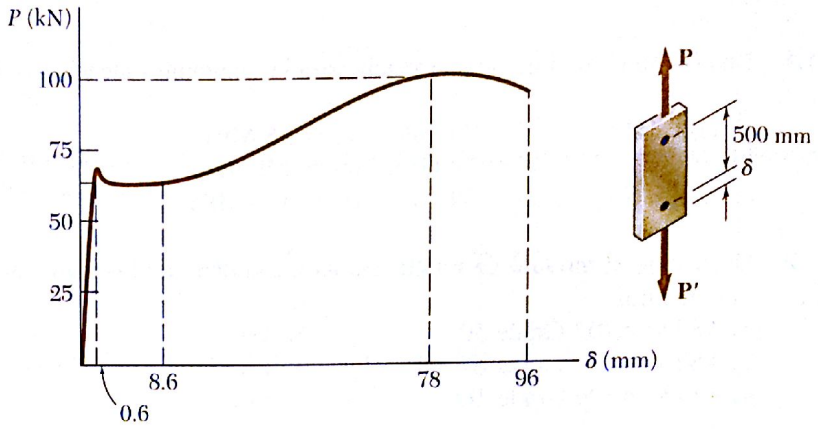



**Figura P11.7**

***11.8*** El diagrama carga-deformación que se muestra en la figura fue dibujado a partir de datos obtenidos durante una prueba a tensión de una barra de aleación de aluminio de 0.875 in. de diámetro. Si se sabe que la deformación se midió con una galga de 15 in. de longitud, determine *a*) el módulo de resiliencia de la aleación, *b*) el módulo de tenacidad de la aleación.

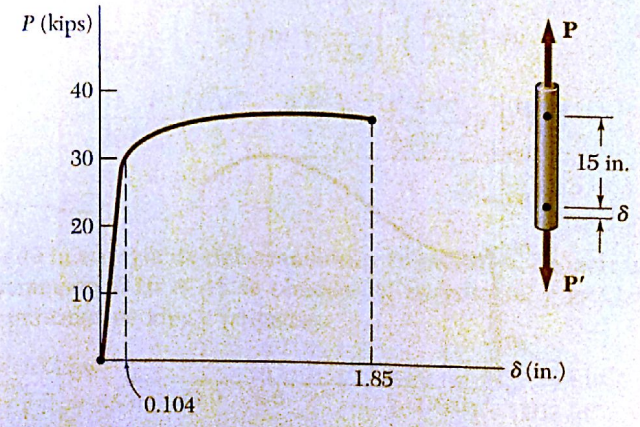



**Figura *P11.8***

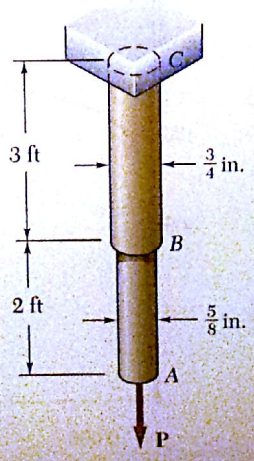



**Figura P11.9**

**11.9** Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar *a*) la energía de deformación de la barra de acero *ABC* cuando $P = 8$ kips, *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en las partes *AB* y *BC* de la barra.

**11.10** Utilice $E = 200$ GPa para determinar *a*) la energía de deformación de la barra de acero $ABC$ cuando $P = 25$ kN, *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en los tramos $AB$ y $BC$ de la barra.

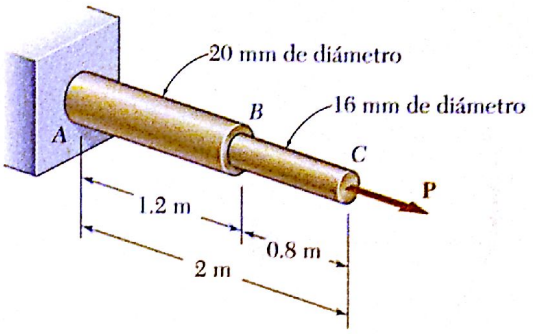



**Figura P11.10**

**11.11** Un tubo de aluminio de 30 in. de longitud cuya sección transversal tiene una superficie de 1.85 in.$^2$ está soldado a un apoyo fijo $A$ y a una tapa rígida $B$. La barra de acero $EF$, de 0.75 in. de diámetro, está soldada a la tapa $B$. Si se sabe que el módulo de elasticidad es de $29 \times 10^6$ psi para el acero y de $10.6 \times 10^6$ psi para el aluminio, determine *a*) la energía de deformación total del sistema cuando $P = 10$ kips y *b*) la densidad de energía de deformación correspondiente en el tubo $CD$ y en la barra $EF$.

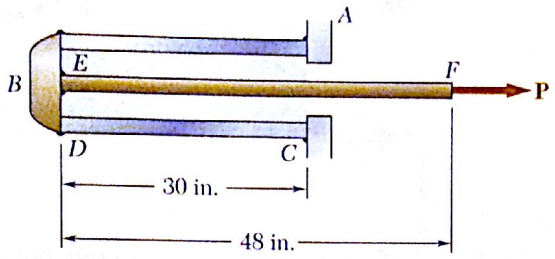



**Figura P11.11**

***11.12*** La barra $AB$ está hecha de un acero para el cual la resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 450$ MPa y $E = 200$ GPa; la barra $BC$ es de una aleación de aluminio para la que $\sigma_Y = 280$ MPa y $E = 73$ GPa. Determine la máxima energía de deformación que puede adquirir la barra compuesta $ABC$ sin que se cause una deformación permanente.

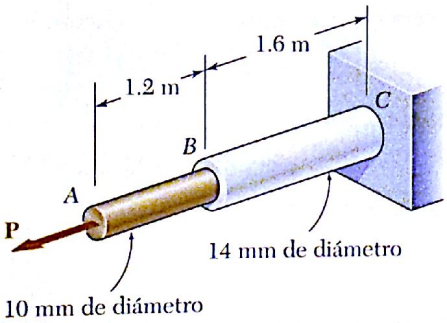



**Figura *P11.12***

**11.13** Las barras $AB$ y $BC$ están construidas de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 300$ MPa y su módulo de elasticidad es $E = 200$ GPa. Determine la máxima energía de deformación que puede adquirir el ensamble sin causar una deformación permanente cuando la longitud $a$ de la barra $AB$ es *a*) 2 m, *b*) 4 m.

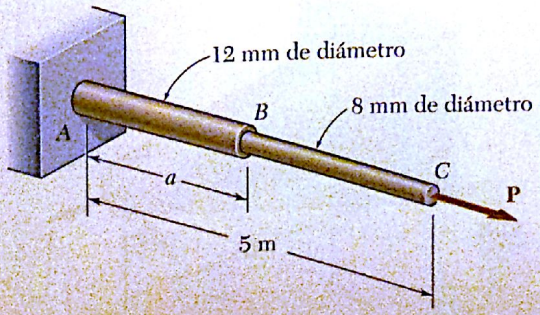



**Figura P11.13**

***11.14*** La barra *BC* está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y$ = 300 MPa y su módulo de elasticidad es $E$ = 200 GPa. Si se sabe que la barra puede adquirir una energía de deformación de 10 J cuando se aplica la carga axial **P**, determine el diámetro de la barra para el cual se satisface un factor de seguridad de seis respecto de la deformación permanente.

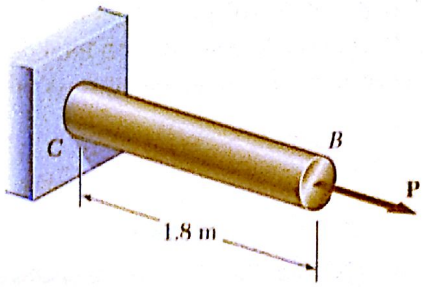



**Figura *P11.14***

**11.15** Use $E = 10.6 \times 10^6$ psi para encontrar por métodos aproximados la máxima energía de deformación que puede adquirir la barra de aluminio mostrada, si el esfuerzo permisible normal es de $\sigma_{perm}$ = 22 ksi.

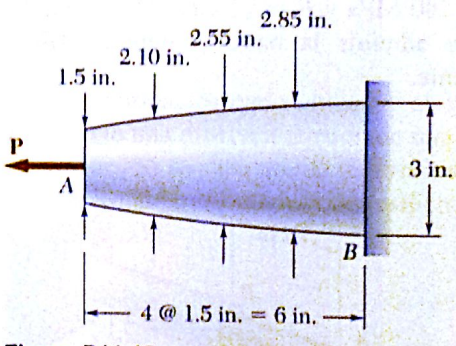



**Figura P11.15**

**11.16** Demuestre por integración que la energía de deformación de la barra ahusada *AB* es

$$U = \frac{1}{4}\frac{P^2L}{EA_{mín}}$$

donde $A_{mín}$ es el área de la sección transversal en el extremo *B*.

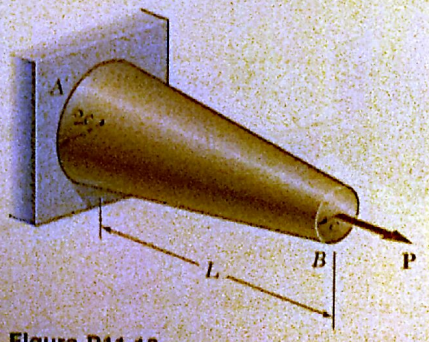



**Figura P11.16**

**11.17 a 11.20** En las armaduras que se muestran en las figuras, todos los elementos son del mismo material y tienen las secciones transversales indicadas. Determine la energía de deformación de la armadura cuando se aplica la carga **P**.

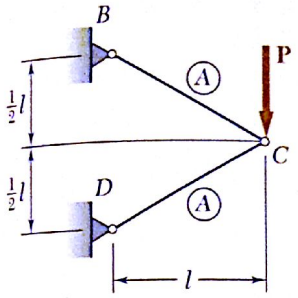



Figura P11.17

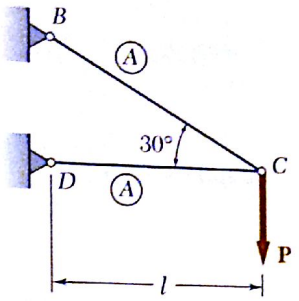



Figura P11.18

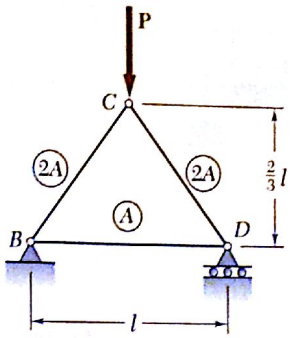



Figura *P11.19*

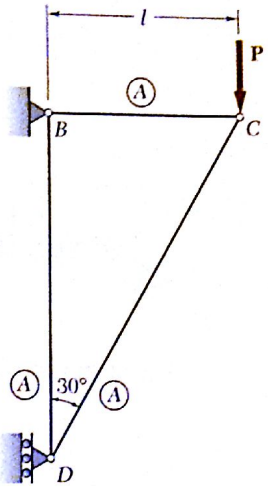



Figura P11.20

**11.21** Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura es de aluminio y tiene el área transversal indicada. Si $E = 72$ GPa, determine la energía de deformación para la carga indicada.

***11.22*** Retome el problema 11.21, y ahora suponga que la carga de 120 kN se retira.

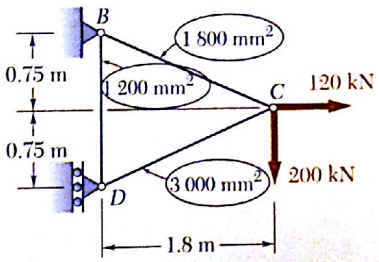



Figura P11.21 y *P11.22*

**11.23 a 11.26** Determine la energía de deformación de la viga prismática *AB* para las cargas que se muestran en las figuras. Considere sólo el efecto de los esfuerzos normales.

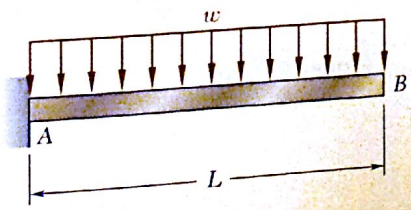



Figura P11.23

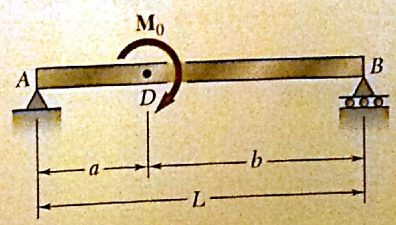



Figura P11.24

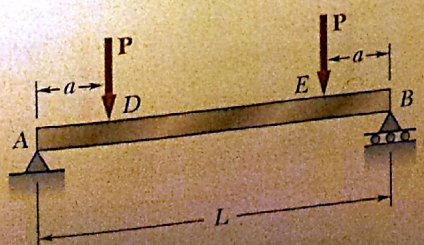



Figura *P11.25*

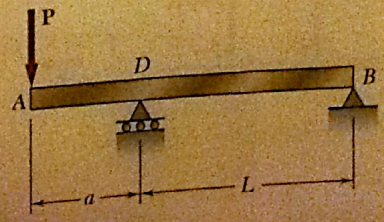



Figura P11.26

**11.27** Si se supone que la viga prismática $AB$ tiene una sección transversal rectangular, demuestre que, para la carga dada, el máximo valor de la densidad de energía de deformación es

$$u_{\text{máx}} = \frac{45}{8}\frac{U}{V}$$

donde $U$ es la energía de deformación y $V$ es el volumen.

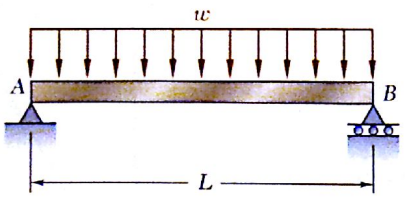



Figura P11.27

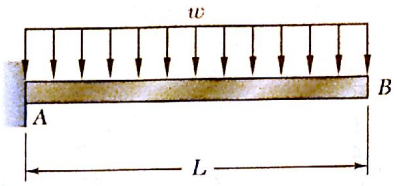



Figura P11.28

**11.28** Si se supone que la viga prismática $AB$ tiene una sección transversal rectangular, demuestre que, para la carga dada, el máximo valor de la densidad de energía de deformación en la viga es

$$u_{\text{máx}} = 15\frac{U}{V}$$

donde $U$ es la energía de deformación y $V$ es el volumen.

**11.29 y 11.31** Si $E = 200$ GPa, determine la energía de deformación debida a la flexión para la viga de acero y la carga que se muestran en las figuras.

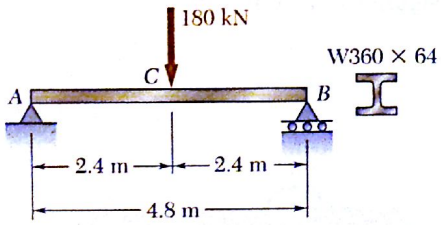



Figura P11.29

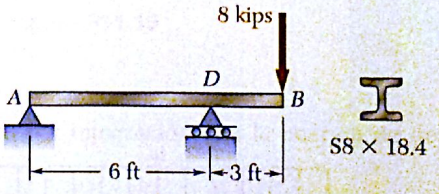



Figura P11.30

**11.30 y *11.32*** Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi a fin de determinar la energía de deformación debida a la flexión para la viga de acero y la carga que se muestran en las figuras.

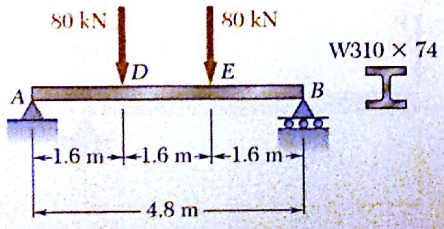



Figura P11.31

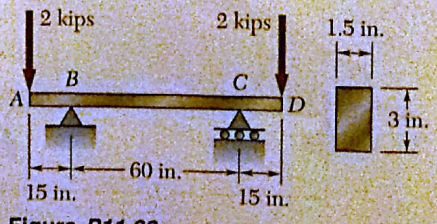



Figura *P11.32*

**11.33** El barco en $A$ acaba de iniciar una perforación en el piso oceánico en busca de petróleo a una profundidad de 5 000 ft. El tubo de acero para perforación tiene un diámetro exterior de 8 in. y una pared de espesor uniforme de 0.5 in. Si se sabe que la parte superior del tubo de perforación da dos vueltas completas antes de que la broca en $B$ comience a operar y que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la máxima energía de deformación que adquiere el tubo de perforación.

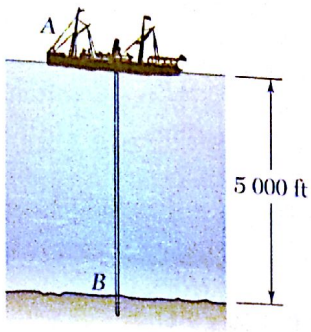



**Figura P11.33**

**11.34** La barra $AC$ está hecha de aluminio y se somete a un par de torsión $\mathbf{T}$ aplicado en el extremo $C$. Si se sabe que $G = 73$ GPa y que la porción $BC$ de la barra es hueca y tiene un diámetro interior de 16 mm, determine la energía de deformación de la barra para un esfuerzo cortante máximo de 120 MPa.

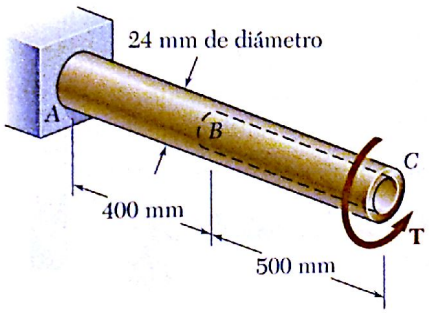



**Figura P11.34**

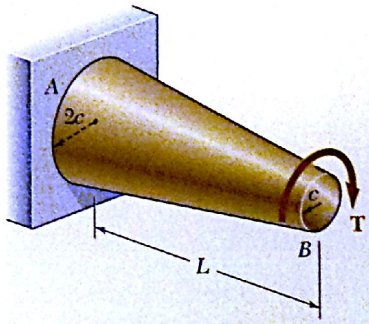



**Figura P11.35**

**11.35** Demuestre por integración que la energía de deformación de la barra ahusada $AB$ es

$$U = \frac{7}{48}\frac{T^2L}{GJ_{\text{mín}}}$$

donde $J_{\text{mín}}$ es el momento polar de inercia en el extremo $B$.

**11.36** El estado que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de latón para el cual $\sigma_Y = 160$ MPa. Use el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar si ocurre la cedencia cuando *a*) $\sigma_z = +45$ MPa, *b*) $\sigma_z = -45$ MPa.

**11.37** El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un elemento de máquina hecho de latón para el cual $\sigma_Y = 160$ MPa. Use el criterio de máxima energía de distorsión para determinar el rango de valores de $\sigma_z$ para el que no ocurre la cedencia.

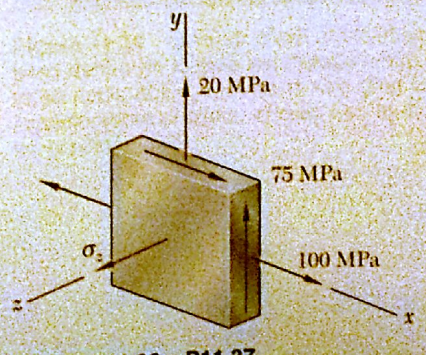



**Figura *P11.36* y P11.37**

**11.38** El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de un tipo de acero para el que $\sigma_Y = 65$ ksi. Use el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia cuando *a*) $\sigma_Y = +16$ ksi, *b*) $\sigma_Y = -16$ ksi.

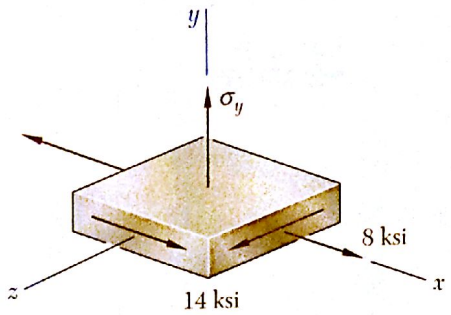



**Figura P11.38 y *P11.39***

***11.39*** El estado de esfuerzo que se muestra en la figura ocurre en un componente de máquina hecho de un tipo de acero para el cual $\sigma_Y = 65$ ksi. Utilice el criterio de la máxima energía de distorsión para determinar el rango de valores de $\sigma_y$ para los que el factor de seguridad asociado con la resistencia a la cedencia es mayor o igual que 2.2.

**11.40** Determine la energía de deformación de la viga prismática $AB$, para ello tome en cuenta el efecto de los esfuerzos normal y cortante.

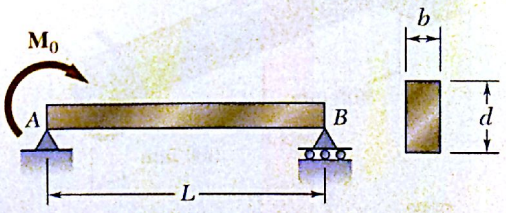



**Figura P11.40**

***11.41** Un soporte aislante de vibración se construyó al pegar una barra $A$ de radio $R_1$ y un tubo $B$ de radio interior $R_2$ a un cilindro hueco de caucho. Si $G$ es el módulo de rigidez del caucho, determine la energía de deformación del cilindro hueco de caucho para la carga mostrada.

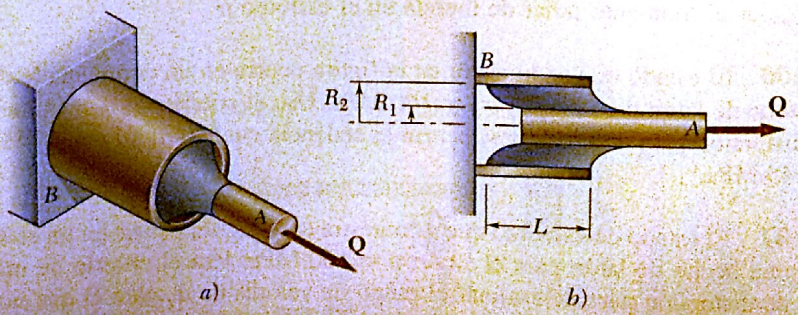



**Figura P11.41**

Considere una barra $BD$ de sección transversal uniforme que es golpeada en su extremo $B$ por un cuerpo de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ (figura 11.23*a*). Puesto que la barra se deforma bajo el impacto (figura 11.23*b*), dentro de ella se desarrollan esfuerzos que alcanzan un máximo valor $\sigma_m$. Después de vibrar por un tiempo, la barra volverá al reposo y todos los esfuerzos desaparecerán. Tal secuencia de eventos se define como una *carga de impacto* (figura 11.24).

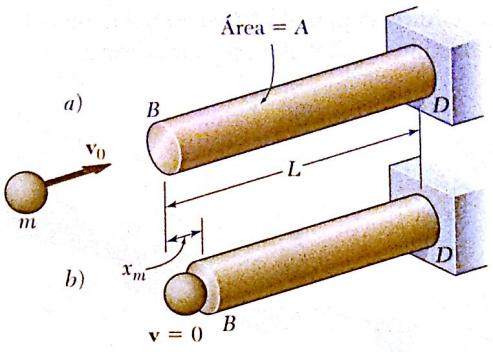



**Figura 11.23**

Para determinar el valor máximo del esfuerzo $\sigma_m$ que ocurre en un punto dado de la estructura sometida a carga de impacto, se elaboran algunas hipótesis simplificativas.

Primero se supondrá que la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv_0^2$ del cuerpo que golpea se transfiere íntegramente a la estructura y, en consecuencia, que la energía de deformación $U_m$ correspondiente a la máxima deformación $x_m$ es

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.37}$$

Esta hipótesis conduce a los siguientes requisitos:

1. No se disipa energía durante el impacto.
2. El cuerpo que golpea no debe rebotar y retener parte de su energía. Esto, a su vez, requiere que la inercia de la estructura sea despreciable comparada con la inercia del cuerpo que golpea.

En la práctica, ninguno de estos requisitos se satisface, y sólo parte de la energía se transfiere a la estructura. Por tanto, el suponer que toda la energía cinética se transfiere a la estructura lleva a un diseño conservador de ésta.

Se supondrá también que el diagrama esfuerzo-deformación obtenido de una prueba estática del material es válido también bajo cargas de impacto. Así, para una deformación elástica de la estructura, el valor máximo de la energía de deformación puede expresarse como

$$U_m = \int \frac{\sigma_m^2}{2E}\,dV \tag{11.38}$$

En el caso de la barra uniforme de la figura 11.23, el máximo esfuerzo $\sigma_m$ tiene el mismo valor a través de la barra y puede escribirse que $U_m = \sigma_m^2 V/2E$. Resolviendo para $\sigma_m$ y sustituyendo $U_m$ de la ecuación (11.37)

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_mE}{V}} = \sqrt{\frac{mv_0^2E}{V}} \tag{11.39}$$

Observe que lo obtenido eligiendo una barra con un gran volumen $V$ y un módulo de elasticidad $E$ bajo, resultará un valor más pequeño del máximo esfuerzo $\sigma_m$ para una carga de impacto dada.

En la mayor parte de los problemas, la distribución de esfuerzos no es uniforme y la ecuación (11.39) no se aplica. Conviene entonces determinar la carga estática $\mathbf{P}_m$ que produciría igual energía de deformación que la carga de impacto y calcular de $P_m$ el valor correspondiente $\sigma_m$ del máximo esfuerzo que ocurre en la estructura.

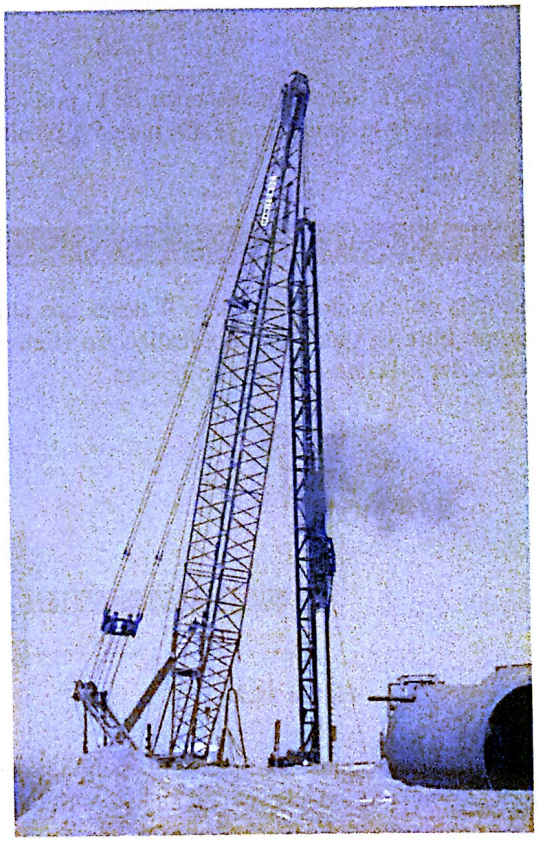


**Figura 11.24** El vapor eleva rítmicamente un peso dentro de la guía del pilote y luego lo impulsa hacia abajo. Esto envía una gran carga de impacto sobre el pilote, el cual, así, es clavado en el piso.

## EJEMPLO 11.06

Un cuerpo de masa $m$ que se mueve con una velocidad $\mathbf{v}_0$ golpea el extremo $B$ de una barra no uniforme $BCD$ (figura 11.25). Si el diámetro de la porción $BC$ es el doble que el de $CD$, halle el valor máximo $\sigma_m$ del esfuerzo en la barra.

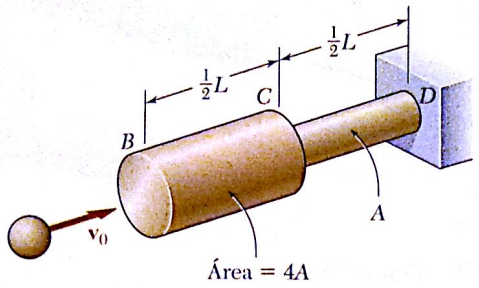



**Figura 11.25**

Haciendo $n = 2$ en la expresión (11.15) del ejemplo 11.01, se tiene que cuando la barra $BCD$ se somete a una carga estática $P_m$, su energía de deformación es

$$U_m = \frac{5P_m^2 L}{16AE} \tag{11.40}$$

donde $A$ es la sección transversal de la porción $CD$ de la barra. Resolviendo la ecuación (11.40) para $P_m$, resulta que la carga estática que produce en la barra la misma energía de deformación que la carga de impacto es

$$P_m = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m AE}{L}}$$

donde $U_m$ es dada por la ecuación (11.37). El mayor esfuerzo se produce en la porción $CD$ de la barra. Dividiendo $P_m$ entre el área $A$ de esa porción, se obtiene

$$\sigma_m = \frac{P_m}{A} = \sqrt{\frac{16}{5}\frac{U_m E}{AL}} \tag{11.41}$$

o, sustituyendo $U_m$ de la ecuación (11.37),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8}{5}\frac{mv_0^2 E}{AL}} = 1.265\sqrt{\frac{mv_0^2 E}{AL}}$$

Comparando este valor con el obtenido para $\sigma_m$, en el caso de la barra uniforme de la figura 11.24, y haciendo $V = AL$ en la ecuación (11.39), se advierte que el máximo esfuerzo en la barra de sección transversal variable es 26.5% mayor que en la barra uniforme más liviana. En consecuencia, como se observó en el análisis del ejemplo 11.01, aumentar el diámetro de la porción $BC$ de la barra se traduce en un *decremento* de la capacidad de absorción de energía de la barra.

## EJEMPLO 11.07

Se deja caer un bloque de peso $W$ desde una altura $h$ sobre el extremo libre de una viga en voladizo $AB$ (figura 11.26). Halle el valor del máximo esfuerzo en la viga.

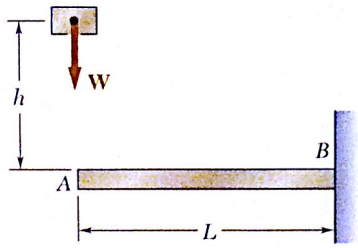



**Figura 11.26**

Al caer desde la distancia $h$, la energía potencial $Wh$ del bloque se convierte en energía cinética. Como resultado del impacto, la energía cinética se transforma en energía de deformación. Luego,†

$$U_m = Wh \tag{11.42}$$

Recordando la expresión obtenida para la energía de deformación del voladizo $AB$ del ejemplo 11.03 y despreciando el efecto de la fuerza cortante, se tiene

$$U_m = \frac{P_m^2 L^3}{6EI}$$

Resolviendo esta ecuación para $P_m$, se halla que la fuerza estática que produce en la viga igual energía de deformación es

$$P_m = \sqrt{\frac{6U_m EI}{L^3}} \tag{11.43}$$

El máximo esfuerzo $\sigma_m$ ocurre en el extremo fijo $B$ y es igual a

$$\sigma_m = \frac{|M|c}{I} = \frac{P_m Lc}{I}$$

Sustituyendo $P_m$ de (11.43), se escribe

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6U_m E}{L(I/c^2)}} \tag{11.44}$$

o, recordando (11.42),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{6WhE}{L(I/c^2)}}$$

† La distancia total que cae el bloque es $h + y_m$, en donde $y_m$ es la deflexión máxima del extremo de la viga. Por tanto, una expresión más aproximada para $U_m$ (véase problema modelo 11.3) es

$$U_m = W(h + y_m) \tag{11.42'}$$

Sin embargo, como $h \gg y_m$, puede despreciarse $y_m$ y utilizarse la ecuación (11.42).

Ahora se compararán los valores obtenidos en la sección precedente para el máximo esfuerzo $\sigma_m$, *a*) en la barra de sección transversal uniforme de la figura 11.23, *b*) en la barra de sección transversal del ejemplo 11.06, y *c*) en el voladizo del ejemplo 11.07, suponiendo que el último tiene sección transversal circular de radio *c*.

*a*) Recuerde primero de la ecuación (11.39) que, si $U_m$ denota la cantidad de energía transferida a la barra como resultado de la carga de impacto, el máximo esfuerzo en la barra de sección transversal uniforme es

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{2U_m E}{V}} \tag{11.45a}$$

donde $V$ es el volumen de la barra.

*b*) Considerando la barra del ejemplo 11.06 y observando que el volumen de ella es

$$V = 4A(L/2) + A(L/2) = 5AL/2$$

se sustituye $AL = 2V/5$ en la ecuación (11.41) y se escribe

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{8U_m E}{V}} \tag{11.45b}$$

*c*) Por último, puesto que $I = \frac{1}{4}\pi c^4$ para una viga de sección transversal circular, se tiene que

$$L(I/c^2) = L(\tfrac{1}{4}\pi c^4/c^2) = \tfrac{1}{4}(\pi c^2 L) = \tfrac{1}{4}V$$

donde $V$ es el volumen de la viga. Sustituyendo en la ecuación (11.44), el máximo esfuerzo en el voladizo del ejemplo 11.07 se expresará como

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{24U_m E}{V}} \tag{11.45c}$$

Se observa que en cada caso el máximo esfuerzo $\sigma_m$ es proporcional a la raíz cuadrada del módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional a la raíz cuadrada del volumen del elemento. Suponiendo que los tres elementos tienen el mismo volumen y son del mismo material, se nota también que, para un valor dado de la energía absorbida, la barra uniforme experimentará el máximo esfuerzo más bajo y el voladizo, el más alto.

Esta observación se explica por el hecho de que, siendo uniforme la distribución de esfuerzos en el caso *a*, la energía de deformación estará distribuida de manera uniforme en la barra. En el caso *b*, en cambio, los esfuerzos en la porción *BC* son sólo 25% de los esfuerzos en la porción *CD*. Esta distribución desigual de esfuerzos y de energía de deformación lleva a un máximo esfuerzo $\sigma_m$ que es el doble del correspondiente en la barra uniforme. Finalmente, en el caso *c*, donde la viga en voladizo se somete a carga transversal de impacto, los esfuerzos varían linealmente a lo largo de la viga y a través de la sección transversal. La distribución muy irregular de energía de deformación provoca que el máximo esfuerzo $\sigma_m$ sea 3.46 veces mayor que si el mismo elemento hubiera sido cargado axialmente, como en el caso *a*.

Las propiedades observadas en los tres casos específicos analizados en esta sección son generales y se dan en todo tipo de estructuras y cargas de impacto. Así, se concluye que una estructura diseñada para soportar en forma efectiva una carga de impacto debe

1. Tener un volumen grande.
2. Ser de un material con bajo módulo de elasticidad y alto límite de fluencia.
3. Estar conformada de modo que los esfuerzos se distribuyan lo más uniformemente posible a través de la estructura.

## 11.9 TRABAJO Y ENERGÍA BAJO UNA CARGA ÚNICA

Cuando se introdujo el concepto de energía de deformación, se analizó el trabajo realizado por una carga axial **P** aplicada al extremo de una barra de sección transversal uniforme (figura 11.1). La energía de deformación de la barra para una elongación $x_1$ se definió como el trabajo de la carga **P** cuando se incrementó lentamente desde 0 hasta el valor $P_1$ correspondiente a $x_1$. Entonces

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \tag{11.2}$$

En el caso de deformación elástica, el trabajo de la carga **P** y, por tanto, la energía de deformación de la barra era

$$U = \tfrac{1}{2}P_1x_1 \tag{11.3}$$

Después, en las secciones 11.4 y 11.5, se calculó la energía de deformación de elementos estructurales en diferentes condiciones de carga, hallando la densidad $u$ de energía de deformación en cualquier punto e integrando $u$ en todo el elemento.

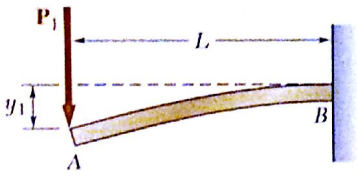


Figura 11.27

Sin embargo, cuando una estructura o elemento se somete a una *carga única concentrada*, es posible usar la ecuación (11.3) para evaluar la energía de deformación elástica, siempre que se conozca la relación carga-deformación. Por ejemplo, en el caso de la viga en voladizo del ejemplo 11.03 (figura 11.27),

$$U = \tfrac{1}{2}P_1y_1$$

y sustituyendo por $y_1$ el valor de la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D,

$$U = \frac{1}{2}P_1\left(\frac{P_1L^3}{3EI}\right) = \frac{P_1^2L^3}{6EI} \tag{11.46}$$

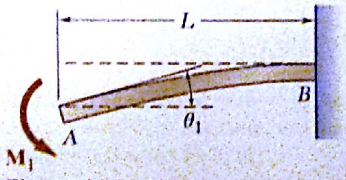


Figura 11.28

Un enfoque similar se puede usar en el caso de energía de deformación de una estructura o elemento sometido a un *par único*. Recordando que el trabajo elemental de un par $M$ es $M\,d\theta$, donde $d\theta$ es un ángulo pequeño, se halla, ya que $M$ y $\theta$ están relacionados linealmente, que la energía elástica de deformación de una viga en voladizo $AB$ sometido a un par único $\mathbf{M}_1$ en su extremo $A$ (figura 11.28) puede expresarse como

$$U = \int_0^{\theta_1} M\,d\theta = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \tag{11.47}$$

en donde $\theta_1$ es la pendiente de la viga en $A$. Sustituyendo $\theta_1$ por el valor obtenido del apéndice D, se escribe

$$U = \frac{1}{2}M_1\left(\frac{M_1L}{EI}\right) = \frac{M_1^2L}{2EI} \tag{11.48}$$

En forma análoga, la energía de deformación elástica de un eje uniforme circular $AB$ de longitud $L$, sometido en su extremo $B$ a un par de torsión $\mathbf{T}_1$ (figura 11.29) será:

$$U = \int_0^{\phi_1} T\,d\phi = \tfrac{1}{2}T_1\phi_1 \tag{11.49}$$

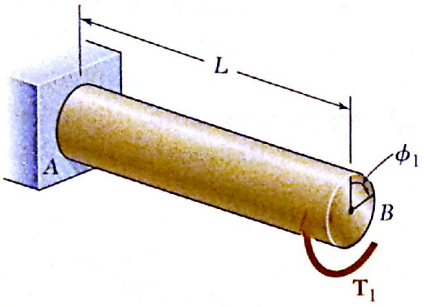



**Figura 11.29**

Sustituyendo el ángulo de torsión $\phi_1$ de la ecuación (3.16), se verifica que

$$U = \frac{1}{2}T_1\left(\frac{T_1L}{JG}\right) = \frac{T_1^2L}{2JG}$$

como se obtuvo previamente en la sección 11.5.

El método presentado en esta sección puede simplificar la solución de muchos problemas relacionados con cargas de impacto. En el ejemplo 11.08, el choque de un automóvil con una barrera (figura 11.30) se analiza por medio de un modelo simplificado consistente en el bloque y una viga simple.

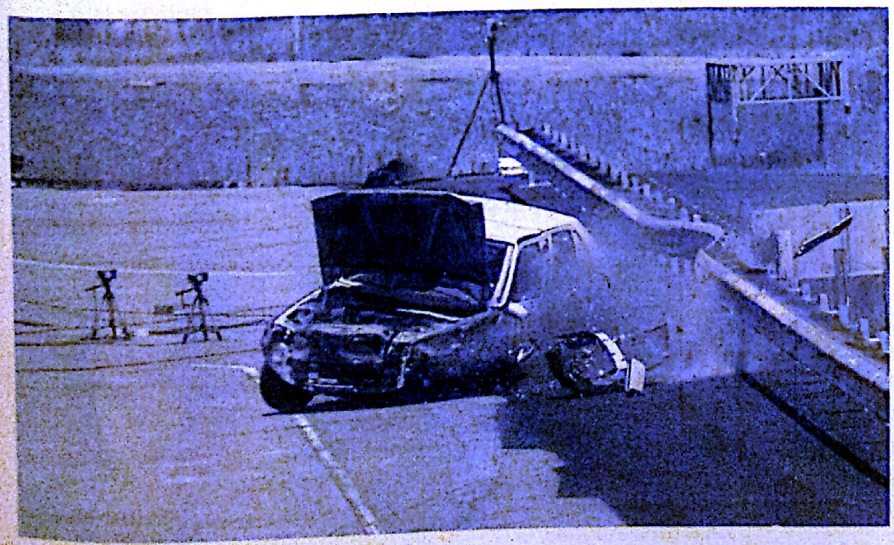


**Figura 11.30** Cuando el automóvil choca contra la barrera, una considerable cantidad de energía se disipa en forma de calor durante la deformación permanente del auto y de la barrera.

## EJEMPLO 11.08

Un bloque de masa $m$ que se mueve con velocidad $\mathbf{v}_0$ golpea el elemento prismático $AB$ en un punto medio $C$ (figura 11.31). Determine *a*) la carga estática equivalente $P_m$, *b*) el máximo esfuerzo $\sigma_m$ en el elemento, *c*) la deflexión máxima $x_m$ en el punto $C$.

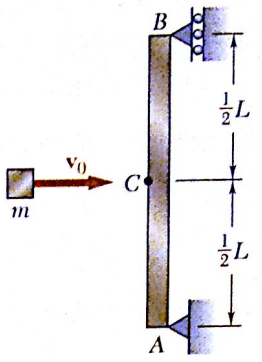



Figura 11.31

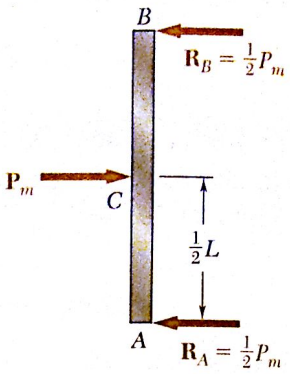



Figura 11.32

***a) Carga estática equivalente.*** La máxima energía de deformación del elemento es igual a la energía cinética del bloque antes del impacto. Entonces

$$U_m = \tfrac{1}{2}mv_0^2 \tag{11.50}$$

Por otra parte, expresando $U_m$ como el trabajo de la carga estática horizontal equivalente cuando se la aplica lentamente en el punto medio $C$ del elemento, se tiene

$$U_m = \tfrac{1}{2}P_m x_m \tag{11.51}$$

donde $x_m$ es la deflexión de $C$ correspondiente a la estática $P_m$. En la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D, se halla que

$$x_m = \frac{P_m L^3}{48EI} \tag{11.52}$$

Sustituyendo $x_m$ de (11.52) en la ecuación (11.51)

$$U_m = \frac{1}{2}\frac{P_m^2 L^3}{48EI}$$

Resolviendo para $P_m$ y retomando la ecuación (11.50), se encuentra que la carga estática equivalente a la carga de impacto es

$$P_m = \sqrt{\frac{96U_m EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} \tag{11.53}$$

***b) Esfuerzo máximo.*** Dibujando el diagrama de cuerpo libre del elemento (figura 11.32), se observa que el momento ocurre en $C$ y es $M_{\text{máx}} = P_m L/4$. El máximo esfuerzo se produce en la sección transversal a través de $C$ y es igual a

$$\sigma_m = \frac{M_{\text{máx}}c}{I} = \frac{P_m Lc}{4I}$$

Sustituyendo $P_m$ de la ecuación (11.53),

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{3mv_0^2 EI}{L(I/c)^2}}$$

***c) Deflexión máxima.*** Reemplazando en la ecuación (11.52) la expresión obtenida para $P_m$ en (11.53),

$$x_m = \frac{L^3}{48EI}\sqrt{\frac{48mv_0^2 EI}{L^3}} = \sqrt{\frac{mv_0^2 L^3}{48EI}}$$

## 11.10 DEFLEXIÓN BAJO UNA CARGA ÚNICA POR EL MÉTODO DE TRABAJO-ENERGÍA

En la sección precedente se estudió que si se conoce la deflexión $x_1$ de una estructura o elemento bajo una carga $\mathbf{P}_1$ concentrada y única, la correspondiente energía de deformación $U$ puede obtenerse escribiendo

$$U = \tfrac{1}{2}P_1 x_1 \tag{11.3}$$

Una expresión similar puede utilizarse para obtener la energía de deformación de un elemento estructural bajo un par único $\mathbf{M}_1$:

$$U = \tfrac{1}{2}M_1\theta_1 \tag{11.47}$$

A la inversa, si se conoce la energía interna $U$ de una estructura o elemento sometido a una fuerza concentrada única $\mathbf{P}_1$ o par $\mathbf{M}_1$, es posible usar las ecuaciones (11.3) u (11.47) para determinar la deflexión correspondiente $x_1$ o el ángulo $\theta_1$. Para determinar la deflexión bajo una carga única aplicada a una estructura compuesta, puede ser más fácil, en lugar de usar algunos de los métodos del capítulo 9, primero calcular la energía de deformación de la estructura integrando la densidad de energía de deformación en sus diferentes partes, como se hizo en las secciones 11.4 y 11.5, y luego utilizar las ecuaciones (11.3) u (11.47) para obtener la deflexión deseada. De manera análoga, el ángulo de torsión $\phi_1$ de un eje compuesto se obtiene por integración de la densidad de energía de deformación en las diferentes partes del eje y resolviendo la ecuación (11.49) para $\phi_1$.

Debe tenerse presente que el método estudiado en esta sección puede usarse *únicamente si la estructura dada está sometida a una carga o par concentrado único*. La energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas *no puede* determinarse calculando el trabajo de cada carga como si se aplicara independientemente a la estructura (sección 11.11). Observe también que, aun si fuera posible calcular la energía de deformación de la estructura de esa manera, sólo una ecuación estaría disponible para determinar las deflexiones correspondientes a las diferentes cargas. En las secciones 11.12 y 11.13 se presentará otro método basado en el concepto de energía de deformación, que resulta útil para hallar la deflexión o la pendiente en un punto dado de una estructura, aun cuando ésta se encuentre sometida a varias cargas simultáneas concentradas, distribuidas o pares.

## EJEMPLO 11.09

Una carga **P** se soporta en $B$ por dos barras uniformes con la misma sección transversal $A$ (figura 11.33). Halle la deflexión vertical del punto $B$.

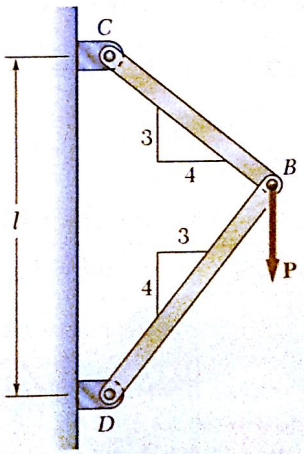


Figura 11.33

En el ejemplo 11.02 se determinó la energía de deformación del sistema bajo la carga. Igualando la expresión obtenida para $U$ al trabajo de la carga,

$$U = 0.364\frac{P^2l}{AE} = \frac{1}{2}Py_B$$

y, resolviendo para la deflexión vertical de $B$

$$y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}$$

***Nota.*** Debe observarse que, una vez obtenidas las fuerzas en las dos barras (véase ejemplo 11.02), las deformaciones $\delta_{B/C}$ y $\delta_{B/D}$ de las barras pueden hallarse utilizando el método estudiado en el capítulo 2. Determinar la deflexión vertical del punto $B$ de esas deformaciones, sin embargo, requeriría de un cuidadoso análisis geométrico. El método de energía de deformación usado aquí, convierte en innecesario dicho análisis.

## EJEMPLO 11.10

Determine la deflexión del extremo libre de la viga en voladizo $AB$ (figura 11.34) considerando el efecto de *a*) los esfuerzos normales únicamente, *b*) los esfuerzos normales y cortantes.

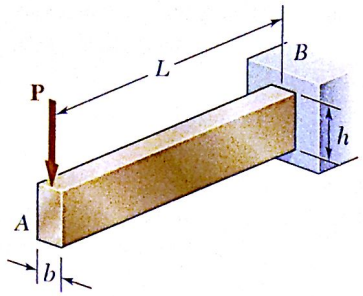



**Figura 11.34**

***a) Efecto de los esfuerzos normales.*** El trabajo de la fuerza **P**, aplicada lentamente a $A$ es

$$U = \tfrac{1}{2}Py_A$$

Sustituyendo por $U$ la expresión de energía de deformación obtenida para la viga del ejemplo 11.03, donde sólo se consideraron esfuerzos normales, se tiene

$$\frac{P^2L^3}{6EI} = \frac{1}{2}Py_A$$

y, despejando $y_A$,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}$$

***b) Efecto de los esfuerzos normales y cortantes.*** Ahora se sustituye por $U$ la expresión (11.24) obtenida en el ejemplo 11.05, donde los efectos tanto de esfuerzos normales como de cortantes se tuvieron en cuenta, y se tiene

$$\frac{P^2L^3}{6EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right) = \frac{1}{2}Py_A$$

y, despejando $y_A$,

$$y_A = \frac{PL^3}{3EI}\left(1 + \frac{3Eh^2}{10GL^2}\right)$$

Se observa que el error relativo cuando no se tiene en cuenta el efecto de la fuerza cortante es igual al obtenido en el ejemplo 11.05, es decir, menor que $0.9(h/L)^2$. Como se indicó entonces, es menor de 0.9% para una viga con una relación $h/L$, menor que $\frac{1}{10}$.

## EJEMPLO 11.11

Se aplica un par de torsión **T** al extremo $D$ del eje $BCD$ (figura 11.35). Si ambas porciones del eje tienen igual longitud y son del mismo material, pero el diámetro de $BC$ es el doble de $CD$, determine el ángulo de torsión para todo el eje.

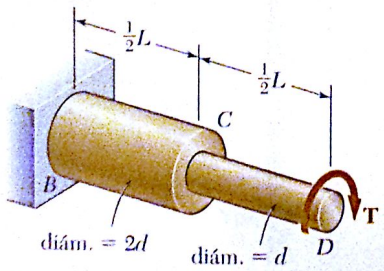



**Figura 11.35**

La energía de deformación de un eje similar se determinó en el ejemplo 11.04 rompiendo el eje en sus partes $BC$ y $CD$. Haciendo $n = 2$ en la ecuación (11.23) se tiene

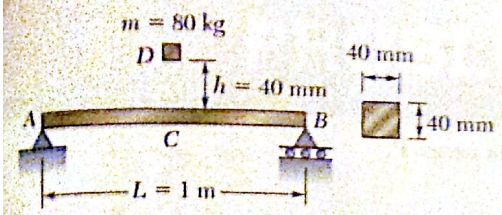
$$U = \frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ}$$

donde $G$ es el módulo de rigidez del material y $J$ el momento polar de inercia de la porción $CD$ del eje. Haciendo $U$ igual al trabajo del par de torsión cuando se aplica lentamente al extremo $D$ y recordando la ecuación (11.49), se escribe

$$\frac{17}{32}\frac{T^2L}{2GJ} = \frac{1}{2}T\phi_{D/B}$$

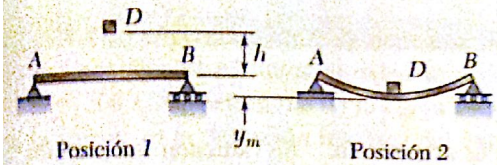
y despejando el ángulo de torsión $\phi_{D/B}$,

$$\phi_{D/B} = \frac{17TL}{32GJ}$$




## PROBLEMA MODELO 11.3

El bloque $D$ de masa $m$ se deja caer libremente y recorre una altura $h$ antes de golpear el punto medio $C$ de la viga de aluminio $AB$. Si $E = 73$ GPa, halle *a*) la deflexión máxima en el punto $C$, *b*) el máximo esfuerzo en la viga.

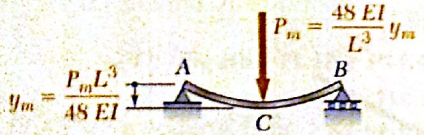



### SOLUCIÓN

**Principio de trabajo y energía.** Como el bloque parte del reposo, en la posición *1* tanto la energía cinética como la de deformación son cero. En la posición *2*, cuando ocurre la deflexión máxima $y_m$, la energía cinética es cero de nuevo. La expresión para $y_m$ se ilustra en la tabla de *Deflexiones y pendientes de vigas* del apéndice D. La energía de deformación en la posición *2* es

$$U_2 = \frac{1}{2}P_m y_m = \frac{1}{2}\frac{48EI}{L^3}y_m^2 \qquad U_2 = \frac{24EI}{L^3}y_m^2$$

Del apéndice D




Se observa que el trabajo hecho por el peso **W** del bloque es $W(h + y_m)$. Igualando la energía de deformación de la viga y el trabajo hecho por **W**, se tiene

$$\frac{24EI}{L^3}y_m^2 = W(h + y_m) \tag{1}$$

***a*) Deflexión máxima en el punto *C*.** De los datos dados se tiene

$$EI = (73 \times 10^9\ \text{Pa})\tfrac{1}{12}(0.04\ \text{m})^4 = 15.573 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m}^2$$

$$L = 1\ \text{m} \qquad h = 0.040\ \text{m} \qquad W = mg = (80\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 784.8\ \text{N}$$

Sustituyendo en la ecuación (1), se obtiene y resuelve una ecuación cuadrática

$$(373.8 \times 10^3)y_m^2 - 784.8y_m - 31.39 = 0 \qquad y_m = 10.27\ \text{mm} \blacktriangleleft$$

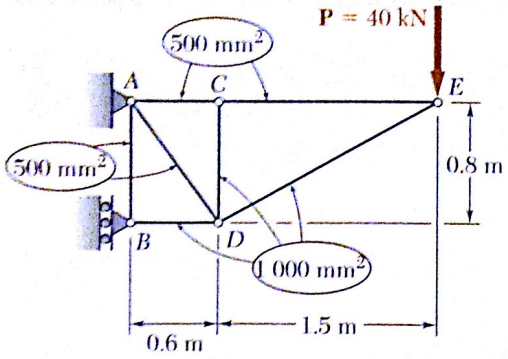
***b*) Esfuerzo máximo.** El valor de $P_m$ es

$$P_m = \frac{48EI}{L^3}y_m = \frac{48(15.573 \times 10^3\ \text{N} \cdot \text{m})}{(1\ \text{m})^3}(0.01027\ \text{m}) \qquad P_m = 7\,677\ \text{N}$$

Recordando que $\sigma_m = M_{\text{máx}}c/I$ y $M_{\text{máx}} = \frac{1}{4}P_m L$, se escribe

$$\sigma_m = \frac{(\frac{1}{4}P_m L)c}{I} = \frac{\frac{1}{4}(7\,677\ \text{N})(1\ \text{m})(0.020\ \text{m})}{\frac{1}{12}(0.040\ \text{m})^4} \qquad \sigma_m = 179.9\ \text{MPa} \blacktriangleleft$$

Es posible obtener una aproximación al trabajo realizado por el peso del bloque omitiendo $y_m$ de la expresión para trabajo y del miembro derecho de la ecuación (1), como se hizo en el ejemplo 11.07. Si esto se efectúa aquí, se obtiene $y_m = 9.16$ mm; el error es de 10.8%. Sin embargo, si un bloque de 8 kg se deja caer desde una altura de 400 mm, produciendo el mismo valor de $Wh$, al omitir $y_m$ en el miembro derecho de la ecuación (1) se produce un error de sólo 1.2%. Un análisis adicional de esta aproximación se ofrece en el problema 11.70.

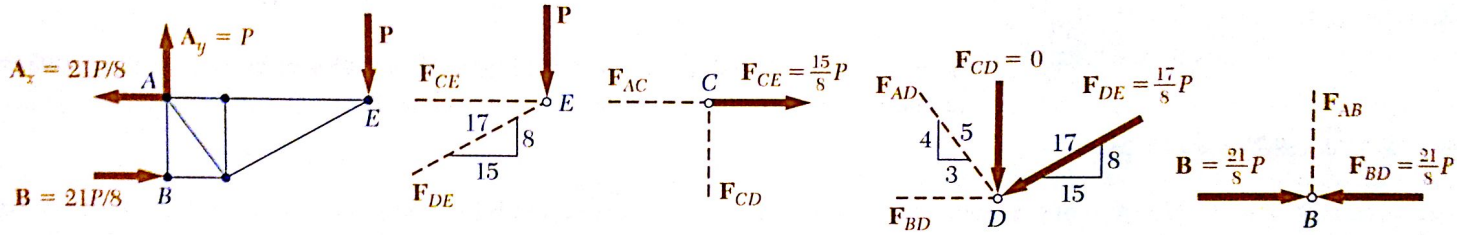



## PROBLEMA MODELO 11.4

Los elementos de la armadura mostrada son secciones de tubería de aluminio con las secciones transversales que se ilustran en la figura. Si $E = 73$ GPa, determine la deflexión vertical del punto $E$, causada por la carga **P**.

## SOLUCIÓN

**Fuerzas axiales en los elementos de la armadura.** Se obtienen las reacciones usando el diagrama de cuerpo libre de toda la armadura. Después se considera, en secuencia, el equilibrio de los nodos $E$, $C$, $D$ y $B$. En cada nodo se determinan las fuerzas indicadas por líneas punteadas. En el nudo $B$, la ecuación $\Sigma F_x = 0$ proporciona una verificación de cálculos.




$\Sigma F_y = 0$: $F_{DE} = -\frac{17}{8}P$ $\quad \Sigma F_x = 0$: $F_{AC} = +\frac{15}{8}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{AD} = +\frac{5}{4}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{AB} = 0$

$\Sigma F_x = 0$: $F_{CE} = +\frac{15}{8}P$ $\quad \Sigma F_y = 0$: $F_{CD} = 0$ $\quad \Sigma F_x = 0$: $F_{BD} = -\frac{21}{8}P$ $\quad \Sigma F_x = 0$: (Se cumple)

**Energía de deformación.** Notando que $E$ es el mismo para todos los elementos, la energía de deformación de la armadura se expresa como

$$U = \sum \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} = \frac{1}{2E} \sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} \tag{1}$$

donde $F_i$ es la fuerza en un elemento dado como se indica en la siguiente tabla y donde la suma se extiende a todos los elementos de la armadura.

| Elemento | $F_i$ | $L_i$, m | $A_i$, m² | $\frac{F_i^2 L_i}{A_i}$ |
|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 0 | 0.8 | $500 \times 10^{-6}$ | 0 |
| $AC$ | $+15P/8$ | 0.6 | $500 \times 10^{-6}$ | $4\,219P^2$ |
| $AD$ | $+5P/4$ | 1.0 | $500 \times 10^{-6}$ | $3\,125P^2$ |
| $BD$ | $-21P/8$ | 0.6 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | $4\,134P^2$ |
| $CD$ | 0 | 0.8 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | 0 |
| $CE$ | $+15P/8$ | 1.5 | $500 \times 10^{-6}$ | $10\,547P^2$ |
| $DE$ | $-17P/8$ | 1.7 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | $7\,677P^2$ |

$$\sum \frac{F_i^2 L_i}{A_i} = 29\,700P^2$$

Volviendo a la ecuación (1) se tiene

$$U = (1/2E)(29.7 \times 10^3 P^2).$$

**Principio de trabajo energía.** Cabe recordar que el trabajo hecho por la carga **P**, cuando se la aplica gradualmente, es $\frac{1}{2}Py_E$. Igualando el trabajo realizado por **P** a la energía de deformación $U$ y recordando que $E = 73$ GPa y $P = 40$ kN, se tiene

$$\frac{1}{2}Py_E = U \qquad \frac{1}{2}Py_E = \frac{1}{2E}(29.7 \times 10^3 P^2)$$

$$y_E = \frac{1}{E}(29.7 \times 10^3 P) = \frac{(29.7 \times 10^3)(40 \times 10^3)}{73 \times 10^9}$$

$$y_E = 16.27 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$y_E = 16.27 \text{ mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

# PROBLEMAS

**11.42** Un collarín de 6 kg tiene una velocidad $v_0 = 4.5$ m/s cuando choca contra una pequeña placa unida al extremo $A$ de la varilla $AB$ con 20 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga estática equivalente, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla, *c*) la deflexión máxima del extremo $A$.

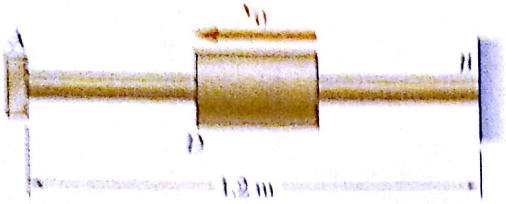



**Figura P11.42 y P11.43**

**11.43** Un collarín $D$ de 5 kg se mueve a lo largo de la varilla uniforme $AB$ y tiene una velocidad $v_0 = 6$ m/s cuando choca contra una pequeña placa unida al extremo $A$ de la varilla. Si $E = 200$ GPa y se sabe que el esfuerzo permisible en la varilla es de 250 MPa, determine el diámetro mínimo que puede utilizarse para esta.

**11.44** El collar $G$ de 100 lb se libera desde el reposo en la posición que se muestra en la figura y lo detiene la placa $BDF$. La placa está unida a la barra $CD$ de in. de diámetro y a las barras $AB$ y $EF$ de $\frac{3}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que para el $\frac{3}{8}$ tipo de acero usado $\sigma_{perm} = 24$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la máxima distancia permisible $h$.

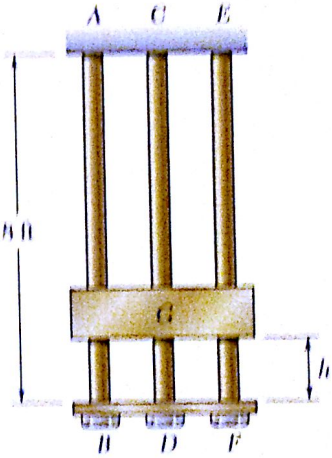



**Figura P11.44**

**11.45** Retome el problema 11.44, y ahora suponga que la barra $CD$ de acero de $\frac{3}{8}$ in. de diámetro, se cambia por una barra de $\frac{1}{8}$ in. de diámetro hecha de un aluminio para el que $\sigma_{perm} = 20$ ksi y $E = 10.6 \times 10^6$ psi.

**11.46** El collarín $D$ se suelta desde el reposo en la posición mostrada en la figura y lo detiene la pequeña placa unida al extremo $C$ de la barra vertical $ABC$. Determine la masa del collar para la que el esfuerzo normal máximo en el tramo $BC$ es de 125 MPa.

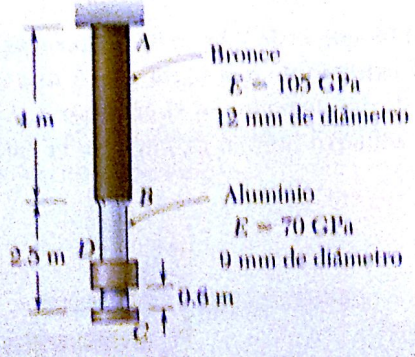



**Figura P11.46**

**11.47** Retome el problema 11.46, y ahora suponga que los dos tramos de la barra $ABC$ están hechas de aluminio.

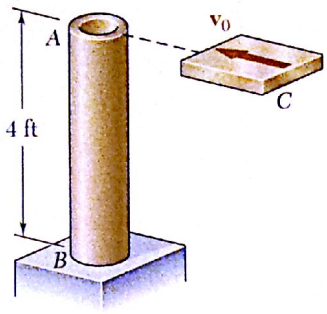



Figura P11.48

**11.48** El poste $AB$ consiste de un tubo de acero de 3.5 in. de diámetro exterior y 0.3 in. de espesor de pared. Un bloque $C$ de 15 lb se mueve horizontalmente con una velocidad $\mathbf{v}_0$ y golpea al poste en una superficie cuadrada en $A$. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la máxima velocidad $v_0$ para la cual el esfuerzo normal máximo en el tubo no excede 24 ksi.

***11.49*** Retome el problema 11.48, y ahora suponga que el poste $AB$ consiste en una barra sólida de 3.5 in. de diámetro.

**11.50** La viga de acero $AB$ es golpeada sobre una superficie cuadrada en su punto medio $C$ por un bloque de 45 kg que se mueve horizontalmente con una velocidad $v_0 = 2$ m/s. Con $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga estática equivalente, *b*) el esfuerzo normal en la viga y *c*) la deflexión máxima en el punto medio $C$ de la viga.

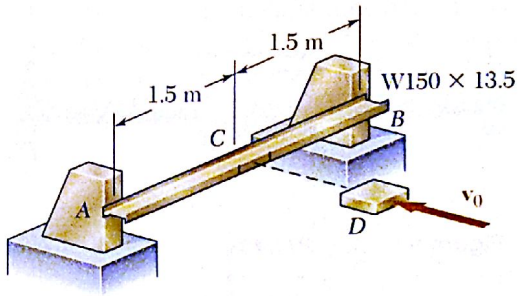



Figura P11.50

**11.51** Retome el problema 11.50, y ahora suponga que la viga de acero laminado W150 × 13.5 se gira 90° alrededor de su eje longitudinal, de manera que su alma está en posición vertical.

**11.52** El bloque $D$ de 45 lb se suelta desde una altura $h = 0.6$ ft sobre la viga $AB$ de acero. Si se sabe que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión máxima en el punto $E$, *b*) el esfuerzo normal máximo en la viga.

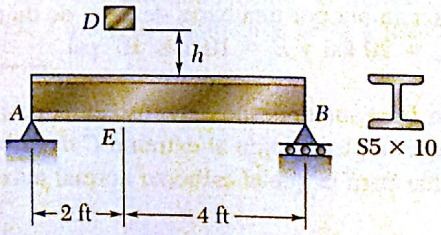



Figura P11.52

**11.53 y 11.54** El bloque $D$ de 2 kg se deja caer desde la posición que se ilustra en la figura sobre el extremo de una barra de 16 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la deflexión máxima en el extremo $A$, *b*) el momento flector máximo en la barra y *c*) el esfuerzo normal máximo en la barra.

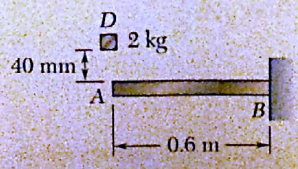



Figura P11.53

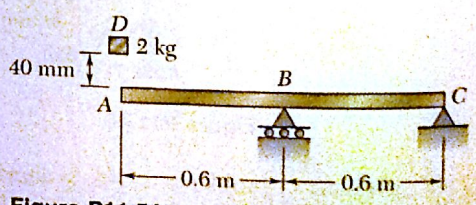



Figura P11.54

**11.55** Una clavadista de 160 lb salta desde una altura de 20 in. sobre el extremo $C$ de un trampolín que tiene la sección transversal uniforme ilustrada en la figura. Ahora suponga que las piernas de la clavadista permanecen rígidas con $E = 1.8 \times 10^6$ psi, y determine *a*) la deflexión máxima en el punto $C$, *b*) el esfuerzo normal máximo en el trampolín, *c*) la carga estática equivalente.

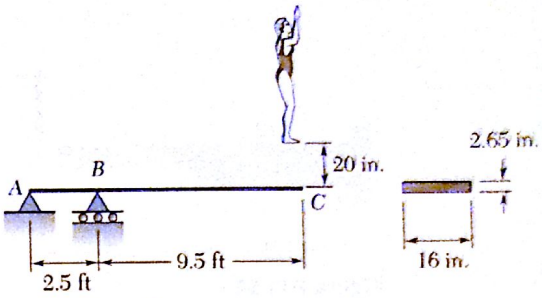


**Figura *P11.55***

**11.56** Se deja caer un bloque de peso $W$ desde una altura $h$ sobre una viga horizontal $AB$ y la golpea en el punto $D$. *a*) Demuestre que la deflexión máxima $y_m$ en el punto $D$ puede expresarse como

$$y_m = y_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{st}}}\right)$$

donde $y_{st}$ representa la deflexión en $D$ causada por una carga estática $W$ aplicada en ese punto y donde la cantidad entre paréntesis representa el *factor de impacto*. *b*) Calcule el factor de impacto para la viga y la carga de impacto del problema 11.53.

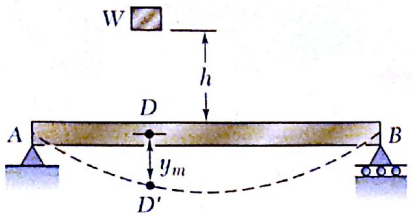


**Figura P11.56 y P11.57**

**11.57** Un bloque de peso $W$ se deja caer desde una altura $h$ sobre la viga horizontal $AB$ y la golpea en el punto $D$. *a*) Si $y_m$ es el valor exacto de la deflexión máxima en $D$ y $y'_m$ es el valor obtenido al despreciar el efecto de esta deflexión en el cambio en la energía potencial del bloque, demuestre que el valor absoluto del error relativo $(y'_m - y_m)/y_m$ nunca excede a $y'_m/2h$. *b*) Verifique el resultado del inciso anterior al resolver el inciso *a*) del problema 11.53, sin tomar en cuenta a $y_m$ cuando se determina el cambio en la energía potencial de la carga, y al comparar la respuesta obtenida de esta manera con la respuesta exacta de ese problema.

**11.58 y 11.59** Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión causada por la carga **P** en el punto $D$.

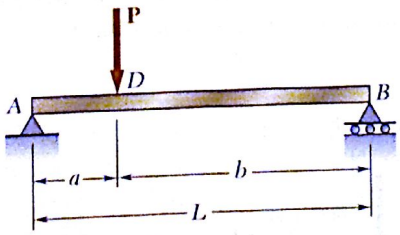


**Figura P11.58**

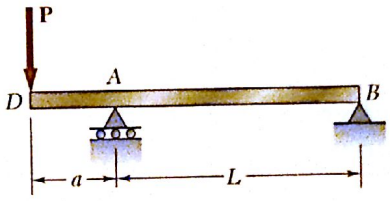


**Figura P11.59**

***11.60* y 11.61** Utilice el método de trabajo y energía para determinar la pendiente causada por el par $\mathbf{M}_0$ en el punto $D$.

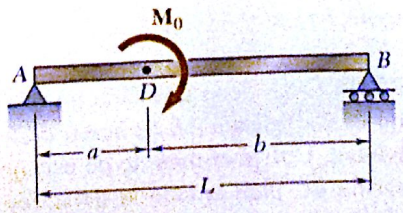


**Figura *P11.60***

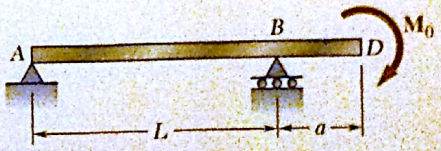


**Figura P11.61**

**11.71 y *11.72*** Cada elemento de la armadura que se muestra en las figuras tiene una sección transversal uniforme con área $A$. Utilice el método de trabajo y energía para determinar la deflexión horizontal del punto de aplicación de la carga **P**.

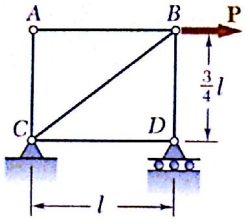



Figura P11.71

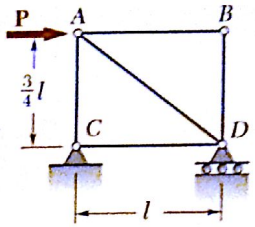



Figura *P11.72*

**11.73** Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 3 in.$^2$. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión vertical de la junta $A$ causada por la aplicación de la carga de 24 kip.

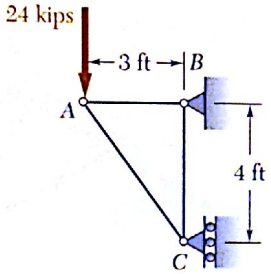



Figura P11.73

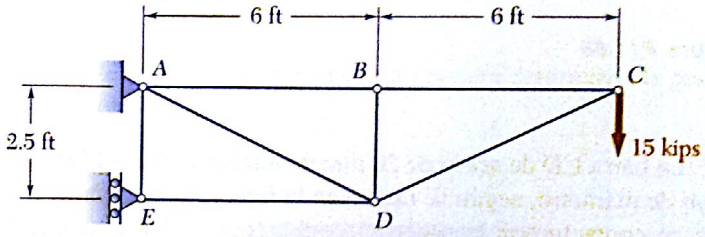



Figura P11.74

**11.74** Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 5 in.$^2$. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la deflexión vertical de la unión $C$ causada por la aplicación de la carga de 15 kips.

**11.75** Los elementos de la armadura que se muestra en la figura están hechos de acero y tienen las áreas de sección transversal indicadas. Si $E = 200$ GPa, determine la deflexión vertical de la junta $C$ causada por la carga de 210 kN.

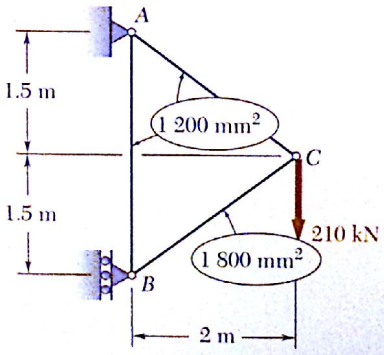



Figura P11.75

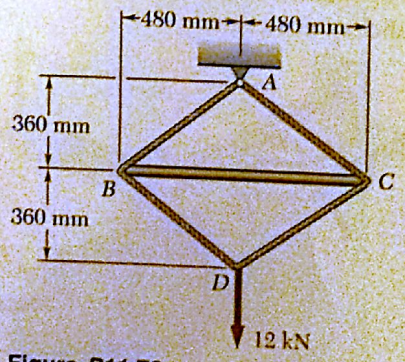



Figura *P11.76*

***11.76*** La barra de acero $BC$ tiene un diámetro de 24 mm y el cable de acero $ABDCA$ tiene 12 mm de diámetro. Si $E = 200$ GPa, determine la deflexión del punto $D$ causada por la carga de 12 kN.

## *11.11 TRABAJO Y ENERGÍA BAJO VARIAS CARGAS

En esta sección se estudiará cómo puede expresarse la energía de deformación de una estructura sometida a varias cargas en función de las mismas y de las deflexiones resultantes.

Sea una viga elástica $AB$ sometida a dos cargas concentradas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$. La energía de deformación de la viga es igual al trabajo de $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ cuando son aplicados lentamente a la viga en $C_1$ y $C_2$, respectivamente (figura 11.36). Sin embargo, para calcular este trabajo primero tienen que expresarse las deflexiones $x_1$ y $x_2$ en función de las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$.

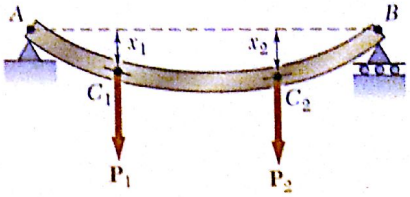


Figura 11.36

Suponga que sólo $\mathbf{P}_1$ se aplica a la viga (figura 11.37). Se observa que tanto $C_1$ como $C_2$ se deflectan y que sus deflexiones son proporcionales a la carga $P_1$. Denominando estas deflexiones $x_{11}$ y $x_{21}$, se tiene

$$x_{11} = \alpha_{11}P_1 \qquad x_{21} = \alpha_{21}P_1 \tag{11.54}$$

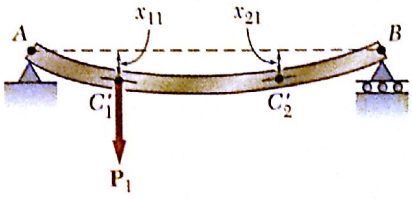


Figura 11.37

donde $\alpha_{11}$ y $\alpha_{21}$ son constantes llamadas *coeficientes de influencia*. Estas constantes representan las deflexiones de $C_1$ y $C_2$, respectivamente, cuando se aplica una carga unitaria en $C_1$ y son características de la viga $AB$.

Ahora, sea sólo $\mathbf{P}_2$ la carga que se aplica a la viga (figura 11.38). Llamado $x_{12}$ y $x_{22}$, respectivamente, las deflexiones resultantes de $C_1$ y $C_2$ resulta

$$x_{12} = \alpha_{12}P_2 \qquad x_{22} = \alpha_{22}P_2 \tag{11.55}$$

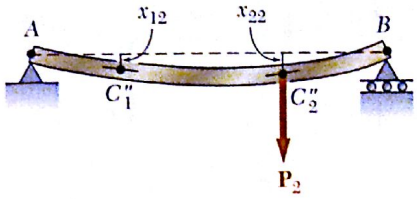


Figura 11.38

donde $\alpha_{12}$ y $\alpha_{22}$ son los coeficientes de influencia que representan las deflexiones de $C_1$ y $C_2$, respectivamente, cuando una carga unitaria se aplica en $C_2$. Utilizando el principio de superposición, cuando ambas cargas están aplicadas (figura 11.36), las deflexiones $x_1$ y $x_2$ de $C_1$ y $C_2$ se expresan como

$$x_1 = x_{11} + x_{12} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 \tag{11.56}$$

$$x_2 = x_{21} + x_{22} = \alpha_{21}P_1 + \alpha_{22}P_2 \tag{11.57}$$

Para calcular el trabajo hecho por $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$, y la energía de deformación de la viga, es importante notar que $\mathbf{P}_1$ se aplica en el comienzo lentamente a $C_1$ (figura 11.39*a*). Recordando la primera de las ecuaciones (11.54), se expresa el trabajo de $\mathbf{P}_1$ como

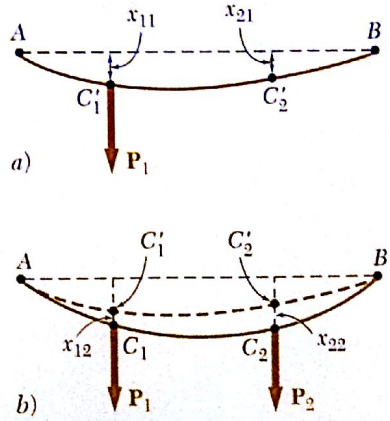


Figura 11.39

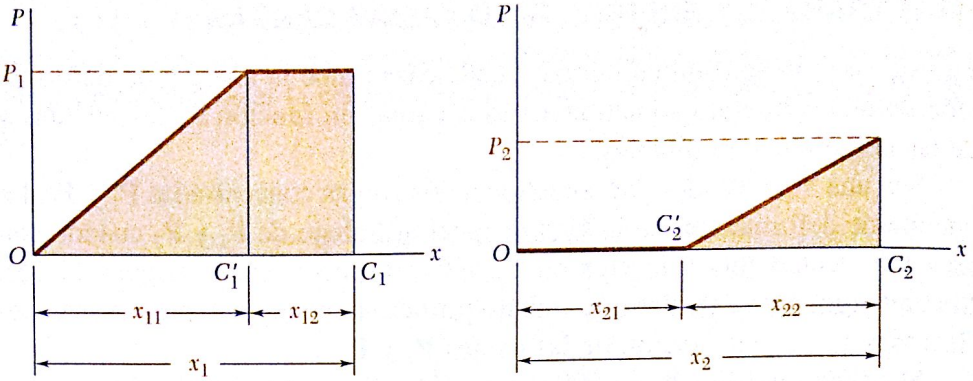
$$\tfrac{1}{2}P_1x_{11} = \tfrac{1}{2}P_1(\alpha_{11}P_1) = \tfrac{1}{2}\alpha_{11}P_1^2 \tag{11.58}$$

y se observa que $\mathbf{P}_2$ no trabaja mientras $C_2$ se mueve hacia $x_{21}$, ya que todavía no se ha aplicado a la viga.

Ahora se aplica lentamente $\mathbf{P}_2$ en $C_2$ (figura 11.39*b*); recordando la segunda de las ecuaciones (11.55), el trabajo de $\mathbf{P}_2$ se expresa como

$$\tfrac{1}{2}P_2x_{22} = \tfrac{1}{2}P_2(\alpha_{22}P_2) = \tfrac{1}{2}\alpha_{22}P_2^2 \tag{11.59}$$

Pero al aplicar $\mathbf{P}_2$ lentamente en $C_2$, el punto de aplicación de $\mathbf{P}_1$ se mueve hacia $x_{12}$ de $C_1'$ a $C_1$, y la carga $\mathbf{P}_1$ trabaja. Como $\mathbf{P}_1$ está *completamente apli-*




*a*) Diagrama carga-desplazamiento para $C_1$

*b*) Diagrama carga-desplazamiento para $C_2$

**Figura 11.40**

*cada* durante este desplazamiento (figura 11.40), su trabajo es $P_1x_{12}$ o, recordando la primera de las ecuaciones (11.55),

$$P_1x_{12} = P_1(\alpha_{12}P_2) = \alpha_{12}P_1P_2 \tag{11.60}$$

Sumando las expresiones obtenidas en (11.58), (11.59) y (11.60), la energía de deformación de la viga sometida a las cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ se expresa como

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \tag{11.61}$$

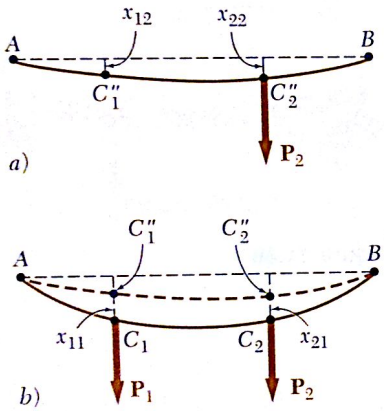
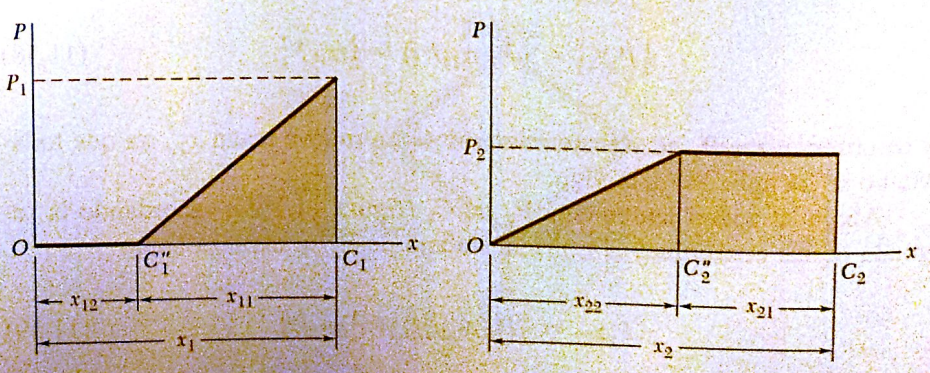



**Figura 11.41**

Si primero se hubiera aplicado la carga $\mathbf{P}_2$ a la viga (figura 11.41*a*), y luego $\mathbf{P}_1$ (figura 11.41*b*), el trabajo hecho por cada fuerza habría sido el que se muestra en la figura 11.42. Cálculos similares a los efectuados, para la energía de deformación de la viga, conducirían a la siguiente expresión alternativa

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{22}P_2^2 + 2\alpha_{21}P_2P_1 + \alpha_{11}P_1^2) \tag{11.62}$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (11.61) y (11.62), se tiene $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, y se concluye que la deflexión producida en $C_1$ por una carga unitaria, aplicada en $C_2$, es igual a la deflexión producida en $C_2$ por una carga unitaria aplicada en $C_1$. Esto se conoce como *teorema recíproco de Maxwell*, en honor al físico británico James Clerk Maxwell (1831-1879).




*a*) Diagrama carga-desplazamiento para $C_1$

*b*) Diagrama carga-desplazamiento para $C_2$

**Figura 11.42**

Aunque ahora se está en capacidad de expresar la energía de deformación $U$ de una estructura sometida a varias cargas como una función de las mismas, no se puede usar el método de la sección 11.10 para hallar la deflexión de tal estructura. Ciertamente, calcular la energía de deformación $U$ integrando la densidad de la energía de deformación $u$ sobre la estructura y al sustituir lo obtenido en la ecuación (11.61) sólo resultaría una ecuación que claramente no podría resolverse para los coeficientes $\alpha$.

## *11.12 TEOREMA DE CASTIGLIANO

Recordando la expresión obtenida para la energía de deformación de una estructura elástica sometida a dos cargas $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$:

$$U = \tfrac{1}{2}(\alpha_{11}P_1^2 + 2\alpha_{12}P_1P_2 + \alpha_{22}P_2^2) \tag{11.61}$$

donde $\alpha_{11}$, $\alpha_{12}$ y $\alpha_{22}$ son los coeficientes de influencia asociados con los puntos de aplicación $C_1$ y $C_2$ de las dos cargas. Derivando ambos miembros de la ecuación (11.61) con respecto a $P_1$ y recordando la ecuación (11.56), resulta

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \alpha_{11}P_1 + \alpha_{12}P_2 = x_1 \tag{11.63}$$

Derivando ambos miembros de la ecuación (11.61) con respecto a $P_2$, recordando la ecuación (11.57) y teniendo en cuenta que $\alpha_{12} = \alpha_{21}$, resulta

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \alpha_{12}P_1 + \alpha_{22}P_2 = x_2 \tag{11.64}$$

En general, si una estructura elástica se somete a $n$ cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$,..., $\mathbf{P}_n$, la deflexión $x_j$ del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, puede expresarse como la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a la carga $\mathbf{P}_j$. Se escribe

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

Éste es el *teorema de Castigliano*, llamado así en honor al ingeniero italiano Alberto Castigliano (1847-1884),† quien lo estableció.

---

† En el caso de una estructura elástica sometida a $n$ cargas $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, . . . , $\mathbf{P}_n$, la deflexión del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, se expresa como

$$x_j = \sum_k \alpha_{jk}P_k \tag{11.66}$$

y la energía de deformación de la estructura es

$$U = \tfrac{1}{2}\sum_i \sum_k \alpha_{ik}P_iP_k \tag{11.67}$$

Derivando $U$ con respecto a $P_j$ y observando que $P_j$ se encuentra en términos que corresponden a $i = j$ o $k = j$, se tiene

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ij}P_i$$

pero $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$,

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{jk}P_k + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_{ji}P_i = \sum_k \alpha_{jk}P_k$$

Recordando la ecuación (11.66) se verifica que

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

Recordando que el trabajo de un par $\mathbf{M}$ es $\frac{1}{2}M\theta$, donde $\theta$ es el ángulo de rotación en el punto donde el par se aplica lentamente, se tiene que el teorema de Castigliano puede usarse para determinar la pendiente de una viga en el punto de aplicación de un par $\mathbf{M}_j$. Resulta

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

Análogamente, el ángulo de torsión $\phi_j$ en una sección de un eje donde el par de torsión $\mathbf{T}_j$ se aplica lentamente, se obtiene derivando la energía de deformación del eje con respecto a $T_j$:

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

## *11.13 DEFLEXIONES POR EL TEOREMA DE CASTIGLIANO

En la sección anterior se vio que la deflexión $x_j$ de una estructura en el punto de aplicación de una fuerza $\mathbf{P}_j$ puede calcularse mediante la derivada parcial $\partial U/\partial P_j$ de la energía de deformación $U$ de la estructura. Cabe recordar de las secciones 11.4 y 11.5 que $U$ se obtiene integrando, o sumando sobre la estructura, la energía de deformación de cada elemento de ésta. Se estudiará que el cálculo de la deflexión $x_j$, por el teorema de Castigliano, se simplifica si la derivación respecto a la carga $P_j$ se efectúa antes de integrar o sumar.

En el caso de una viga, por ejemplo, recordando de la sección 11.4 que

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx \tag{11.17}$$

y se determina la deflexión $x_j$ del punto de aplicación de la carga $\mathbf{P}_j$ escribiendo

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}dx \tag{11.70}$$

Para una armadura con $n$ elementos uniformes de longitud $L_i$, área transversal $A_i$ y fuerza interna $F_i$, se recurre a la ecuación (11.14) y resulta

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i^2 L_i}{2A_i E} \tag{11.71}$$

La deflexión $x_j$ del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$ se obtiene derivando con respecto a $P_j$ cada término de la suma. Se escribe

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

## EJEMPLO 11.12

La viga en voladizo $AB$ soporta una carga distribuida uniformemente $w$ y una carga concentrada **P**, como se muestra (figura 11.43). Si $L = 2$ m, $w = 4$ kN/m, $P = 6$ kN y $EI = 5$ MN · m$^2$, halle la deflexión en $A$.

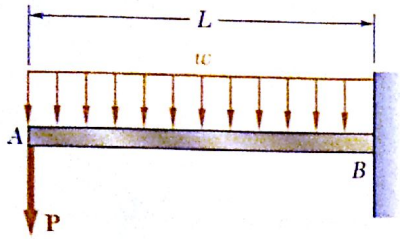



**Figura 11.43**

La deflexión $y_A$ del punto $A$, donde se aplica la carga **P**, se obtiene de la ecuación (11.70). Como **P** es vertical y dirigida hacia abajo, $y_A$ representa una deflexión vertical y es positiva hacia abajo. Entonces

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P}dx \tag{11.73}$$

El momento flector $M$ a una distancia $x$ de $A$ es

$$M = -(Px + \tfrac{1}{2}wx^2) \tag{11.74}$$

y su derivada con respecto a $P$ es

$$\frac{\partial M}{\partial P} = -x$$

Sustituyendo $M$ y $\partial M/\partial P$ en la ecuación (11.73), se escribe

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(Px^2 + \frac{1}{2}wx^3\right)dx$$

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{PL^3}{3} + \frac{wL^4}{8}\right) \tag{11.75}$$

Sustituyendo los datos dados, resulta

$$y_A = \frac{1}{5 \times 10^6\ \text{N} \cdot \text{m}^2}\left[\frac{(6 \times 10^3\ \text{N})(2\ \text{m})^3}{3} + \frac{(4 \times 10^3\ \text{N/m})(2\ \text{m})^4}{8}\right]$$

$$y_A = 4.8 \times 10^{-3}\ \text{m} \qquad y_A = 4.8\ \text{mm} \downarrow$$

Note que el cálculo de la derivada parcial $\partial M/\partial P$ *no habría podido hacerse* si el valor numérico de $P$ se hubiera sustituido por $P$ en la expresión (11.74) para el momento flector.

---

Puede observarse que la deflexión $x_j$ de una estructura en un punto dado $C_j$ se obtiene por aplicación directa del teorema de Castigliano si una carga $\mathbf{P}_j$ se aplica en $C_j$ en la dirección en que $x_j$ debe determinarse. Cuando no hay carga en $C_j$, o cuando se aplica una carga en otra dirección, la deflexión $x_j$ puede obtenerse por el teorema de Castigliano si se utiliza el siguiente procedimiento: se aplica una carga "ficticia" $\mathbf{Q}_j$ en $C_j$ en la dirección que se desea para $x_j$ y se utiliza el teorema de Castigliano para obtener la deflexión

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial Q_j} \tag{11.76}$$

debida a $\mathbf{Q}_j$ y a las cargas reales. Haciendo $Q_j = 0$ en la ecuación (11.76) se obtiene la deflexión en $C_j$ en la dirección deseada bajo la carga dada.

Análogamente puede procederse con la pendiente $\theta_j$ en un punto $C_j$ aplicando un par ficticio $\mathbf{M}_j$ en $C_j$, calculando la derivada parcial $\partial U/\partial M_j$, y haciendo $M_j = 0$ en la expresión obtenida.

## EJEMPLO 11.13

La viga en voladizo $AB$ soporta una carga uniformemente distribuida $w$ (figura 11.44). Halle la deflexión y la pendiente en $A$.

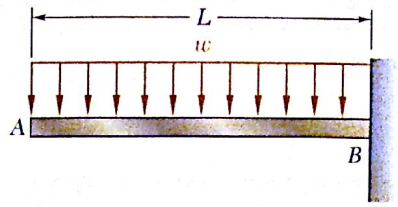



Figura 11.44

***Deflexión en A.*** Se aplica una carga ficticia hacia abajo $\mathbf{Q}_A$ en $A$ (figura 11.45) y se escribe

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial Q_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial Q_A}\,dx \qquad (11.77)$$

El momento flector $M$ a una distancia $x$ de $A$ es

$$M = -Q_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.78)$$

y su derivada con respecto a $Q_A$ es

$$\frac{\partial M}{\partial Q_A} = -x \qquad (11.79)$$

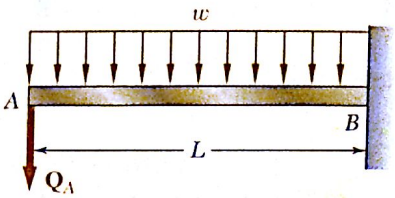



Figura 11.45

Sustituyendo $M$ y $\partial M/\partial Q_A$ de (11.78) y (11.79) en (11.77), y haciendo $Q_A = 0$, se obtiene la deflexión en $A$ para la carga dada:

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-x)\,dx = +\frac{wL^4}{8EI}$$

Puesto que la carga ficticia se dirige hacia abajo, el signo positivo indica que

$$y_A = \frac{wL^4}{8EI}\downarrow$$

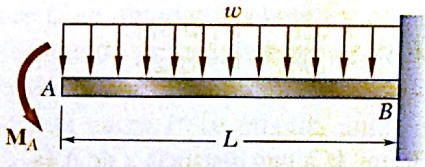



Figura 11.46

***Pendiente en A.*** Se aplica el par ficticio $\mathbf{M}_A$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj en $A$ (figura 11.46) y se escribe

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_A}$$

Recordando la ecuación (11.17), se tiene

$$\theta_A = \frac{\partial}{\partial M_A}\int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial M_A}\,dx \qquad (11.80)$$

El momento flector $M$ a una distancia $x$ de $A$ es

$$M = -M_A - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.81)$$

y su derivada con respecto a $M_A$ es

$$\frac{\partial M}{\partial M_A} = -1 \qquad (11.82)$$

Sustituyendo $M$ y $\partial M/\partial M_A$ de (11.81) y (11.82) en (11.80), y haciendo $M_A = 0$, se obtiene la pendiente en $A$ para la carga dada:

$$\theta_A = \frac{1}{EI}\int_0^L (-\tfrac{1}{2}wx^2)(-1)\,dx = +\frac{wL^3}{6EI}$$

Como el par ficticio se aplicó en sentido contrario al de las manecillas del reloj, el signo positivo indica que el ángulo $\theta_A$ va en el mismo sentido que las de las agujas del reloj:

$$\theta_A = \frac{wL^3}{6EI}\curvearrowright$$

## EJEMPLO 11.14

Una carga **P** es soportada en $B$ por dos barras de igual material e igual sección transversal de área $A$ (figura 11.47). Determine la deflexión vertical y horizontal en el punto $B$.

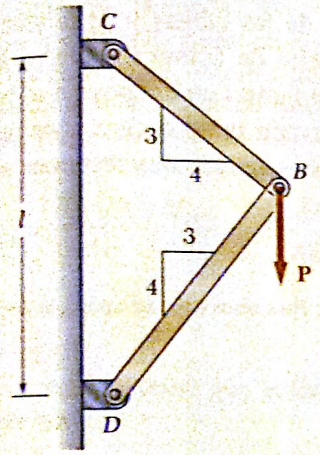



Figura 11.47

Se aplica una carga ficticia horizontal **Q** en $B$ (figura 11.48). Del teorema de Castigliano se tiene

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} \qquad y_B = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Recordando, de la sección 11.4, la expresión (11.14) para energía de deformación de una barra resulta

$$U = \frac{F_{BC}^2(BC)}{2AE} + \frac{F_{BD}^2(BD)}{2AE}$$

en donde $F_{BC}$ y $F_{BD}$ son las fuerzas en $BC$ y $BD$, respectivamente. Entonces

$$x_B = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} \qquad (11.83)$$

y

$$y_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial P} \qquad (11.84)$$

Del diagrama de cuerpo libre del pasador $B$ (figura 11.49) se obtiene

$$F_{BC} = 0.6P + 0.8Q \qquad F_{BD} = -0.8P + 0.6Q \qquad (11.85)$$

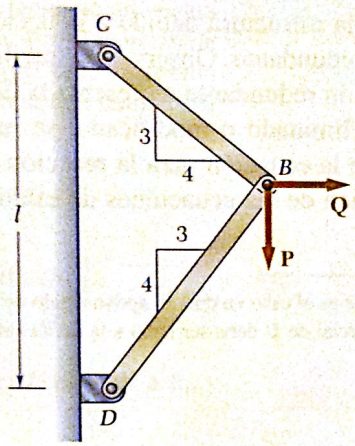



Figura 11.48

Derivando estas expresiones con respecto a $Q$ y $P$, se obtiene

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial Q} = 0.8 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial Q} = 0.6$$
$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial P} = 0.6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial P} = -0.8 \qquad (11.86)$$

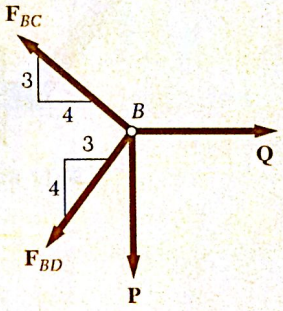



Figura 11.49

Sustituyendo de (11.85) y (11.86) en (11.83) y (11.84), haciendo $Q = 0$, y notando que $BC = 0.6l$ y $BD = 0.8l$, se obtienen las deflexiones horizontales y verticales del punto $B$ bajo la carga dada **P**:

$$x_B = \frac{(0.6P)(0.6l)}{AE}(0.8) + \frac{(-0.8P)(0.8l)}{AE}(0.6)$$

$$= -0.096\frac{Pl}{AE}$$

$$y_B = \frac{(0.6P)(0.6l)}{AE}(0.6) + \frac{(-0.8P)(0.8l)}{AE}(-0.8)$$

$$= +0.728\frac{Pl}{AE}$$

Haciendo referencia a las direcciones de las cargas **Q** y **P**, se concluye que

$$x_B = 0.096\frac{Pl}{AE}\leftarrow \qquad y_B = 0.728\frac{Pl}{AE}\downarrow$$

Se verifica que la expresión obtenida para la deflexión vertical de $B$ es la misma encontrada en el ejemplo 11.09.

## *11.14 ESTRUCTURAS ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS

Las reacciones en los apoyos de una estructura elástica estáticamente indeterminada pueden calcularse mediante el teorema de Castigliano. En el caso de una estructura indeterminada de primer grado, por ejemplo, se designa una de las reacciones como redundante y se elimina o se modifica el apoyo correspondiente. La reacción redundante se trata, entonces, como una carga desconocida que, junto con las otras cargas, debe producir deformaciones compatibles con los apoyos originales. Primero se calcula la energía de deformación $U$ de la estructura debido a la acción combinada de las cargas y de la reacción redundante. Observando que la derivada parcial de $U$ con respecto a la reacción redundante representa la deflexión (o pendiente) en el apoyo que ha sido eliminado o modificado, se realiza esta derivada igual a cero y se resuelve la ecuación para la reacción redundante.† Las reacciones restantes se obtienen de las ecuaciones de estática.

† Éste es el caso en que un apoyo rígido no permite deflexión. Para otros tipos de apoyo, la derivada parcial de $U$ debe ser igual a la deflexión permitida.

### EJEMPLO 11.15

Determine las reacciones en los apoyos para la viga prismática y carga mostradas (figura 11.50).

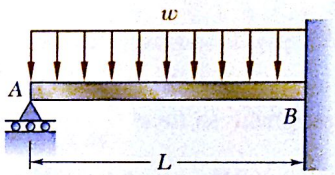


Figura 11.50

La viga es estáticamente indeterminada de primer grado. Se considera la reacción en $A$ como redundante y se suelta la viga de ese apoyo. Ahora se considerará la reacción $\mathbf{R}_A$ como una carga desconocida (figura 11.51) y se calculará teniendo en cuenta que la deflexión $y_A$ en $A$ debe ser cero. Por el teorema de Castigliano $y_A = \partial U/\partial R_A$, donde $U$ es la energía de deformación de la viga bajo la carga distribuida y la reacción redundante. De la ecuación (11.70), resulta

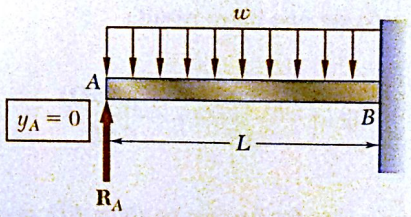


Figura 11.51

$$y_A = \frac{\partial U}{\partial R_A} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_A}\,dx \qquad (11.87)$$

Ahora se expresa el momento flector $M$ para la carga de la figura 11.51.

El momento flector a una distancia $x$ de $A$ es

$$M = R_A x - \tfrac{1}{2}wx^2 \qquad (11.88)$$

y su derivada con respecto a $R_A$ es

$$\frac{\partial M}{\partial R_A} = x \qquad (11.89)$$

Sustituyendo $M$ y $\partial M/\partial R_A$ de (11.88) y (11.89) en (11.87), se escribe

$$y_A = \frac{1}{EI}\int_0^L \left(R_A x^2 - \frac{1}{2}wx^3\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right)$$

Haciendo $y_A = 0$ y despejando a $R_A$, resulta

$$R_A = \tfrac{3}{8}wL \qquad \mathbf{R}_A = \tfrac{3}{8}wL\uparrow$$

De las condiciones de equilibrio de la viga, se tiene que la reacción en $B$ consta de los siguientes fuerza y par:

$$\mathbf{R}_B = \tfrac{5}{8}wL\uparrow \qquad \mathbf{M}_B = \tfrac{1}{8}wL^2\circlearrowleft$$

## EJEMPLO 11.16

Una carga **P** está apoyada en $B$ por tres barras del mismo material y la misma sección transversal de área (figura 11.52). Determine la fuerza en cada barra.

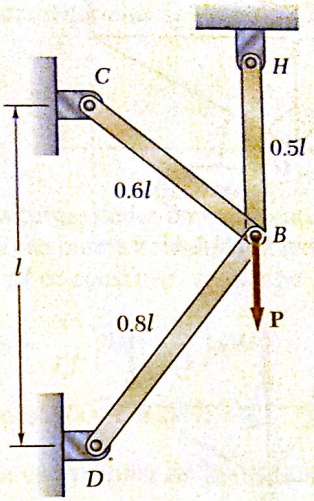


Figura 11.52

La estructura es estáticamente indeterminada de primer grado. Se considera la reacción en $H$ como redundante y se suelta la barra $BH$ de su apoyo en $H$. Ahora la reacción $\mathbf{R}_H$ es una carga desconocida (figura 11.53) y se determinará teniendo en cuenta que la deflexión $y_H$ del punto $H$ debe ser cero. Por el teorema de Castigliano $y_H = \partial U/\partial R_H$, donde $U$ es la energía de deformación del sistema de tres barras bajo la carga **P** y la reacción redundante $\mathbf{R}_H$. De la ecuación (11.72), se escribe

$$y_H = \frac{F_{BC}(BC)}{AE}\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} + \frac{F_{BD}(BD)}{AE}\frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} + \frac{F_{BH}(BH)}{AE}\frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} \qquad (11.90)$$

Puede notarse que la fuerza en la barra $BH$ es igual a $R_H$ y por tanto

$$F_{BH} = R_H \qquad (11.91)$$

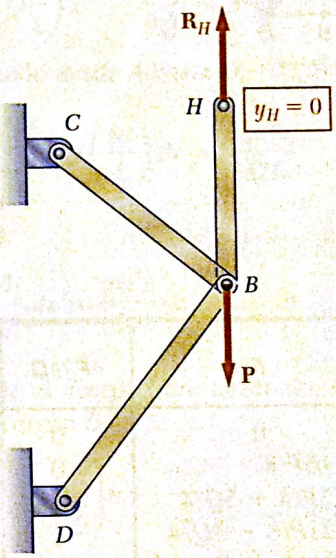


Figura 11.53

Entonces del diagrama de cuerpo libre del pasador $B$ (figura 11.54) se obtiene

$$F_{BC} = 0.6P - 0.6R_H \qquad F_{BD} = 0.8R_H - 0.8P \qquad (11.92)$$

Derivando con respecto a $R_H$, la fuerza en cada barra, se tiene

$$\frac{\partial F_{BC}}{\partial R_H} = -0.6 \qquad \frac{\partial F_{BD}}{\partial R_H} = 0.8 \qquad \frac{\partial F_{BH}}{\partial R_H} = 1 \qquad (11.93)$$

Sustituyendo de (11.91), (11.92) y (11.93) en (11.90), y notando que las longitudes $BC$, $BD$ y $BH$ son, respectivamente, iguales a $0.6l$, $0.8l$ y $0.5l$, se obtiene

$$y_H = \frac{1}{AE}[(0.6P - 0.6R_H)(0.6l)(-0.6) + (0.8R_H - 0.8P)(0.8l)(0.8) + R_H(0.5l)(1)]$$

Haciendo $y_H = 0$, resulta

$$1.228R_H - 0.728P = 0$$

y, resolviendo para $R_H$,

$$R_H = 0.593P$$

Llevando este valor a las ecuaciones (11.91) y (11.92), se obtienen las fuerzas en las tres barras:

$$F_{BC} = +0.244P \qquad F_{BD} = -0.326P \qquad F_{BH} = +0.593P$$

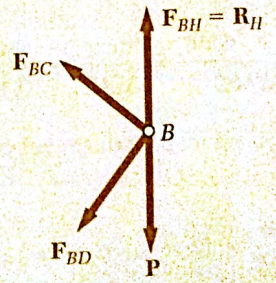
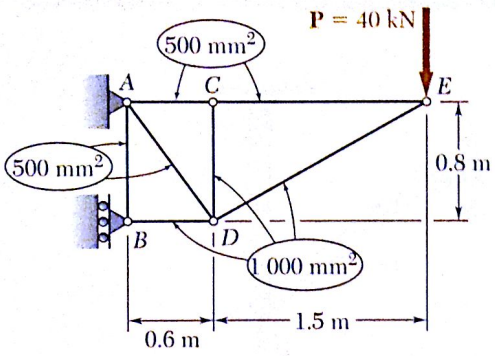


Figura 11.54



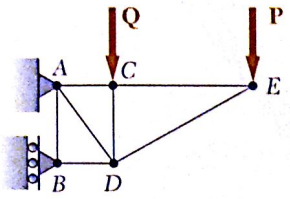

## PROBLEMA MODELO 11.5

Para la armadura y carga del problema modelo 11.4, determine la deflexión vertical del nodo $C$.

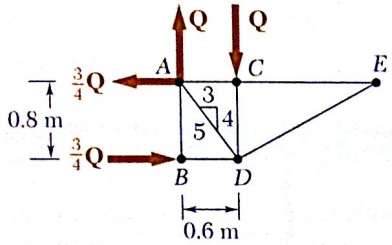
## SOLUCIÓN

**Teorema de Castigliano.** Como no hay fuerza vertical en el nodo $C$, se introduce la carga ficticia **Q** como se muestra en la figura. Usando el teorema de Castigliano, donde $F_i$ es la fuerza en un elemento dado bajo la carga combinada de **P** y **Q** y $E$ = constante.

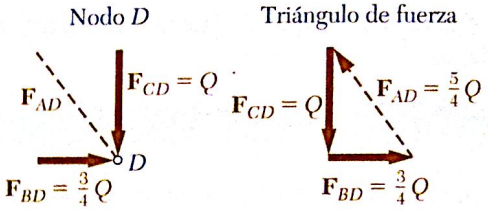
$$y_C = \sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i E}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} \tag{1}$$




**Fuerza en los elementos.** Considerando en secuencia el equilibrio de los nodos $E$, $C$, $B$ y $D$, se determina la fuerza en cada elemento causado por la carga **Q**.




Nodo $E$: $F_{CE} = F_{DE} = 0$
Nodo $C$: $F_{AC} = 0$; $F_{CD} = -Q$
Nodo $B$: $F_{AB} = 0$; $F_{BD} = -\frac{3}{4}Q$




En el problema modelo 11.4 se calculó previamente la fuerza que **P** ejerce en cada elemento. La fuerza total en cada elemento bajo la acción combinada de **Q** y **P** se muestra en la siguiente tabla. Formando $\partial F_i/\partial Q$ para cada elemento, se calcula $(F_i L_i/A_i)(\partial F_i/\partial Q)$ como se indica en la tabla.

| Elemento | $F_i$ | $\partial F_i/\partial Q$ | $L_i$, m | $A_i$, m² | $\left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $AB$ | 0 | 0 | 0.8 | $500 \times 10^{-6}$ | 0 |
| $AC$ | $+15P/8$ | 0 | 0.6 | $500 \times 10^{-6}$ | 0 |
| $AD$ | $+5P/4 + 5Q/4$ | $+\frac{5}{4}$ | 1.0 | $500 \times 10^{-6}$ | $+3\,125P + 3\,125Q$ |
| $BD$ | $-21P/8 - 3Q/4$ | $-\frac{3}{4}$ | 0.6 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | $+1\,181P + 338Q$ |
| $CD$ | $-Q$ | $-1$ | 0.8 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | $+800Q$ |
| $CE$ | $+15P/8$ | 0 | 1.5 | $500 \times 10^{-6}$ | 0 |
| $DE$ | $-17P/8$ | 0 | 1.7 | $1\,000 \times 10^{-6}$ | 0 |

$$\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = 4\,306P + 4\,263Q$$

**Deflexión de $C$.** Sustituyendo en la ecuación (1) se tiene

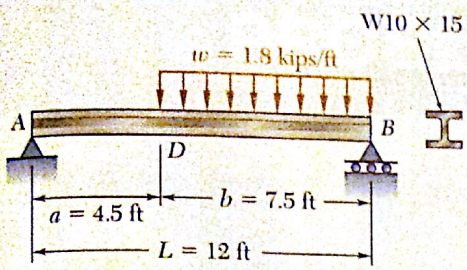
$$y_C = \frac{1}{E}\sum \left(\frac{F_i L_i}{A_i}\right)\frac{\partial F_i}{\partial Q} = \frac{1}{E}(4\,306P + 4\,263Q)$$

Se hace ahora $Q = 0$, teniendo en cuenta que la carga **Q** no forma parte de la original, y sustituyendo los datos dados, $P = 40$ kN y $E = 73$ GPa, resulta

$$y_C = \frac{4\,306(40 \times 10^3\ \text{N})}{73 \times 10^9\ \text{Pa}} = 2.36 \times 10^{-3}\ \text{m} \qquad y_C = 2.36\ \text{mm} \downarrow \blacktriangleleft$$

## PROBLEMA MODELO 11.6

Para la viga y carga mostradas en la figura, determine la deflexión en el punto $D$. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

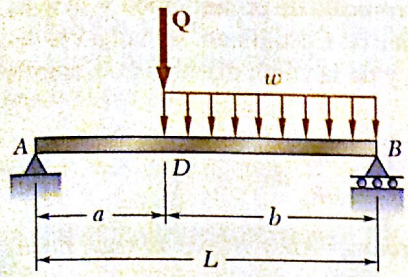



## SOLUCIÓN

**Teorema de Castigliano.** Como las cargas dadas no incluyen una carga vertical en $D$, se introduce una ficticia $\mathbf{Q}$ como se muestra. Usando el teorema de Castigliano y notando que la rigidez flexional $EI$ es constante, se escribe

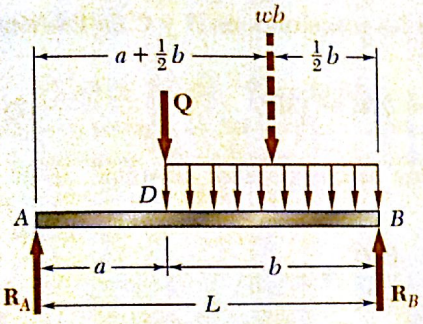
$$y_D = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)dx \tag{1}$$

Se integra separadamente para las porciones $AD$ y $DB$ de la viga.




***Reacciones.*** Usando el diagrama de cuerpo libre de la viga completa, se tiene

$$\mathbf{R}_A = \frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\uparrow \qquad \mathbf{R}_B = \frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\uparrow$$




***Porción AD de la viga.*** Usando el diagrama de cuerpo libre que muestra la figura se halla

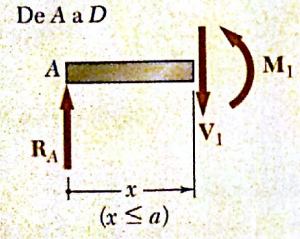
$$M_1 = R_A x = \left(\frac{wb^2}{2L} + Q\frac{b}{L}\right)x \qquad \frac{\partial M_1}{\partial Q} = +\frac{bx}{L}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde $A$ hasta $D$,

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}\,dx = \frac{1}{EI}\int_0^a R_A x\left(\frac{bx}{L}\right)dx = \frac{R_A a^3 b}{3EIL}$$

Se sustituye a $R_A$ y luego se hace $Q = 0$.

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M_1}{\partial Q}\,dx = \frac{wa^3b^3}{6EIL^2} \tag{2}$$

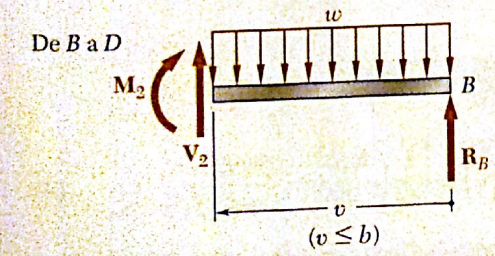



***Porción DB de la viga.*** Empleando el cuerpo libre mostrado, se tiene que el momento flector a una distancia $v$ del extremo $B$ es

$$M_2 = R_B v - \frac{wv^2}{2} = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L} + Q\frac{a}{L}\right]v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial Q} = +\frac{av}{L}$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde el punto $B$, donde $v = 0$, hasta $D$ donde $v = b$, se escribe

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}\,dv = \frac{1}{EI}\int_0^b \left(R_B v - \frac{wv^2}{2}\right)\left(\frac{av}{L}\right)dv = \frac{R_B ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL}$$




Sustituyendo $R_B$ y haciendo $Q = 0$,

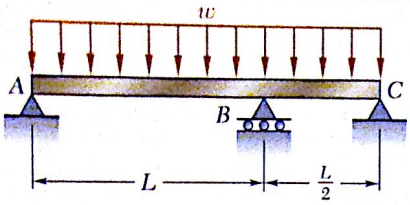
$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial Q}\,dv = \left[\frac{wb(a + \frac{1}{2}b)}{L}\right]\frac{ab^3}{3EIL} - \frac{wab^4}{8EIL} = \frac{5a^2b^4 + ab^5}{24EIL^2}w \tag{3}$$

***Deflexión en el punto D.*** Combinando los resultados de las ecuaciones (1), (2) y (3) se tiene

$$y_D = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a^2 + 5ab + b^2) = \frac{wab^3}{24EIL^2}(4a + b)(a + b) = \frac{wab^3}{24EIL}(4a + b)$$

En el apéndice C, se tiene que, para un perfil W10 × 15, $I = 68.9$ in.$^4$. Sustituyendo los valores de $I$, $w$, $a$, $b$ y $L$ se obtiene

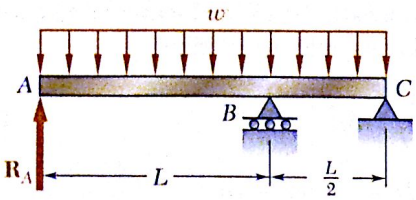
$$y_D = 0.262 \text{ in.} \downarrow \blacktriangleleft$$




## PROBLEMA MODELO 11.7

Para la viga uniforme y la carga mostradas en la figura, determine las reacciones en los apoyos.

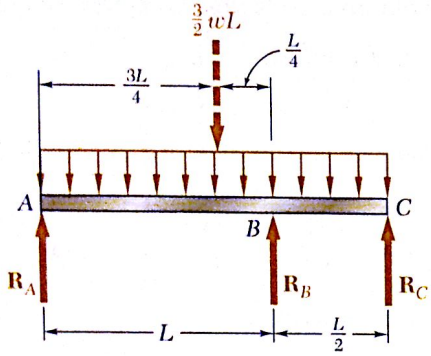
## SOLUCIÓN




**Teorema de Castigliano.** La viga es indeterminada de primer grado y se toma la reacción $\mathbf{R}_A$ como redundante. Usando el teorema de Castigliano, se hallará la deflexión en $A$ debida a la acción combinada de $\mathbf{R}_A$ y de la carga distribuida. Como la rigidez flexional $EI$ es constante:

$$y_A = \int \frac{M}{EI}\left(\frac{\partial M}{\partial R_A}\right)dx = \frac{1}{EI}\int M\frac{\partial M}{\partial R_A}dx \tag{1}$$

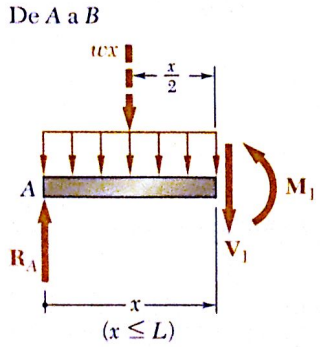
La integración se hará separadamente para las porciones $AB$ y $BC$ de la viga. Finalmente, se obtiene $\mathbf{R}_A$ haciendo $y_A = 0$.




*Cuerpo libre: viga completa.* Se expresan las reacciones en $B$ y $C$ en función de $R_A$ y la carga distribuida

$$R_B = \tfrac{9}{4}wL - 3R_A \qquad R_C = 2R_A - \tfrac{3}{4}wL \tag{2}$$

*Porción AB de la viga.* Usando el diagrama de cuerpo libre mostrado, se encuentra que

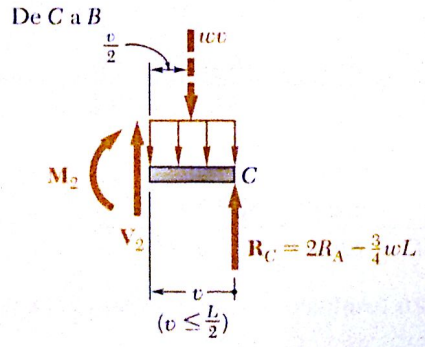



$$M_1 = R_A x - \frac{wx^2}{2} \qquad \frac{\partial M_1}{\partial R_A} = x$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde $A$ hasta $B$, se tiene

$$\frac{1}{EI}\int M_1\frac{\partial M}{\partial R_A}dx = \frac{1}{EI}\int_0^L\left(R_A x^2 - \frac{wx^3}{2}\right)dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) \tag{3}$$

*Porción BC de la viga.* Se escribe




$$M_2 = \left(2R_A - \frac{3}{4}wL\right)v - \frac{wv^2}{2} \qquad \frac{\partial M_2}{\partial R_A} = 2v$$

Sustituyendo en la ecuación (1) e integrando desde $C$, donde $v = 0$, hasta $B$ donde $v = \frac{1}{2}L$, se tiene

$$\frac{1}{EI}\int M_2\frac{\partial M_2}{\partial R_A}dv = \frac{1}{EI}\int_0^{L/2}\left(4R_A v^2 - \frac{3}{2}wLv^2 - wv^3\right)dv$$

$$= \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{wL^4}{16} - \frac{wL^4}{64}\right) = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) \tag{4}$$

**Reacción en A.** Sumando las expresiones halladas en (3) y (4) se obtiene $y_A$ y se hace igual a cero.

$$y_A = \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{3} - \frac{wL^4}{8}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{R_A L^3}{6} - \frac{5wL^4}{64}\right) = 0$$

Despejando $R_A$,

$$R_A = \frac{13}{32}wL \qquad R_A = \frac{13}{32}wL\uparrow \blacktriangleleft$$

**Reacciones en B y en C.** Reemplazando $R_A$ en la ecuación (2) se obtiene

$$R_B = \frac{33}{32}wL\uparrow \qquad R_C = \frac{wL}{16}\uparrow \blacktriangleleft$$

# PROBLEMAS

**11.77 a 11.79** Use la información del apéndice D para calcular el trabajo de las cargas al aplicarlas sobre la viga *a*) si se aplica primero la carga **P** y *b*) si se aplica primero el par **M**.

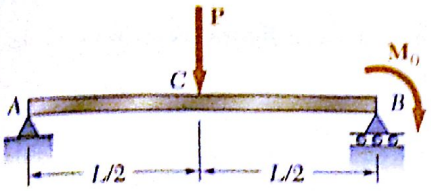



**Figura P11.77**

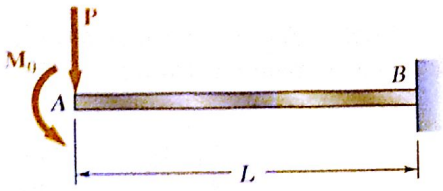



**Figura *P11.78***

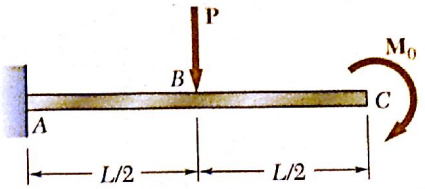



**Figura P11.79**

***11.80* a 11.82** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, *a*) calcule el trabajo de las cargas al aplicarlas sucesivamente a la viga, para ello utilice la información del apéndice D, *b*) calcule la energía de deformación de la viga mediante el método de la sección 11.4 y demuestre que es igual al trabajo obtenido en el inciso *a*).

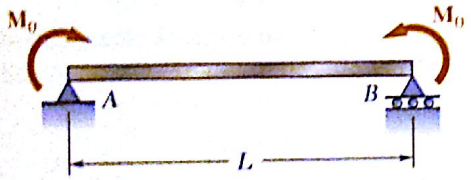



**Figura *P11.80***

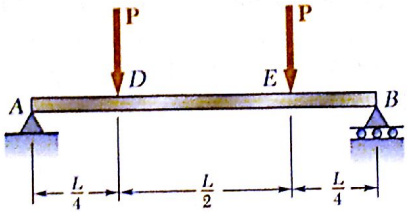



**Figura P11.81**

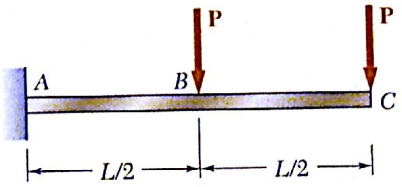



**Figura P11.82**

**11.83 y 11.84** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión del punto *D*.

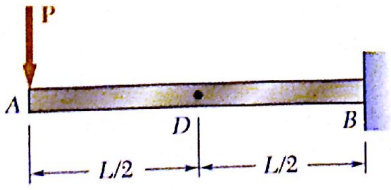



**Figura P11.83 y P11.85**

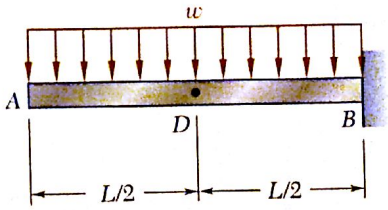



**Figura P11.84 y *P11.86***

**11.85 y *11.86*** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto *D*.

**11.87** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto *B*.

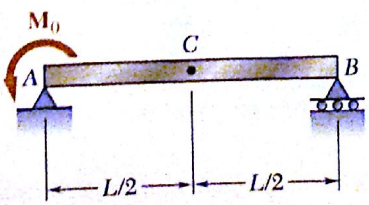



**Figura P11.87**

**11.88 y 11.89** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión en el punto $D$.

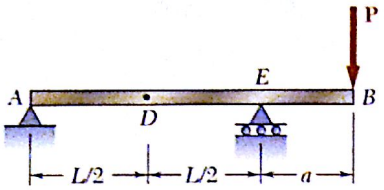



**Figura P11.88 y *P11.90***

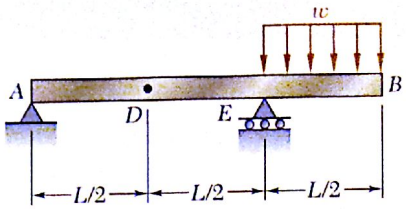



**Figura P11.89 y P11.91**

***11.90* y 11.91** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la pendiente en el punto $D$.

**11.92** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto $A$. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

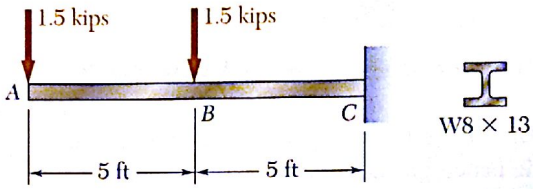



**Figura P11.92 y *P11.93***

***11.93*** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto $B$. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

**11.94 y 11.95** Para la viga y la carga que se muestran en las figuras, determine la deflexión en el punto $B$. Utilice $E = 200$ GPa.

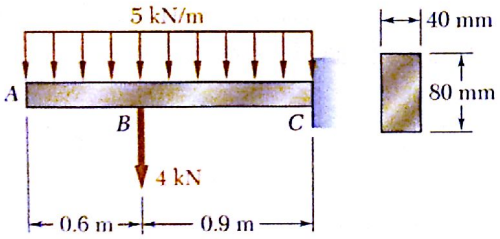



**Figura P11.94**

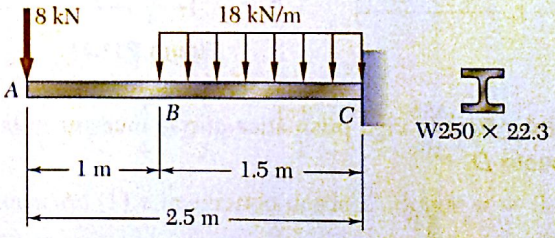



**Figura P11.95**

**11.96** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente en el extremo $A$. Utilice $E = 200$ GPa.

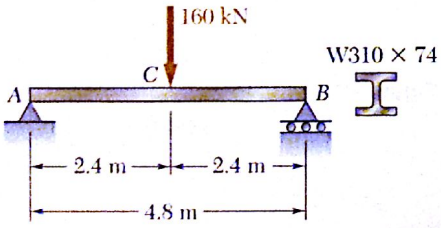



**Figura P11.96**

***11.97*** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la deflexión en el punto $C$. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

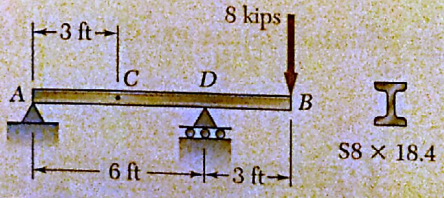



**Figura *P11.97* y P11.98**

**11.98** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la pendiente en el extremo $A$. Utilice $E = 200$ GPa.

**11.99 y *11.100*** Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión que se indica a continuación.

**11.99** Deflexión vertical de la unión $C$.

***11.100*** Deflexión horizontal de la unión $C$.

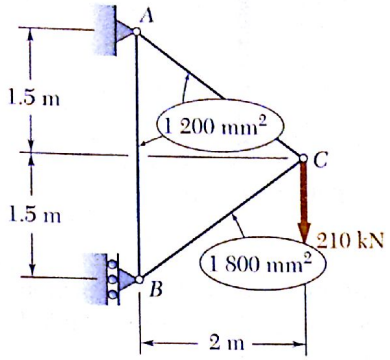



**Figura P11.99 y *P11.100***

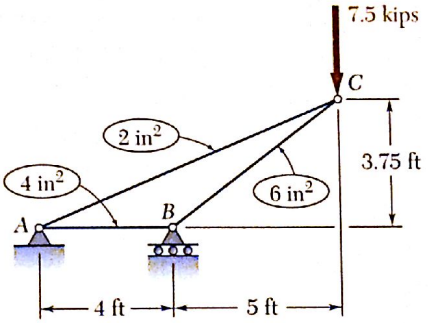



**Figura P11.101 y P11.102**

**11.101 y 11.102** Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene el área de sección transversal mostrada. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi para determinar la deflexión que se indica a continuación.

**11.101** Deflexión vertical de la unión $C$.

**11.102** Deflexión horizontal de la unión $C$.

**11.103 y *11.104*** Cada uno de los elementos de la armadura que se ilustra en la figura está hecho de acero y tiene un área de sección transversal de 500 mm$^2$. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión que se indica a continuación.

**11.103** Deflexión vertical de la unión $B$.

***11.104*** Deflexión horizontal de la unión $B$.

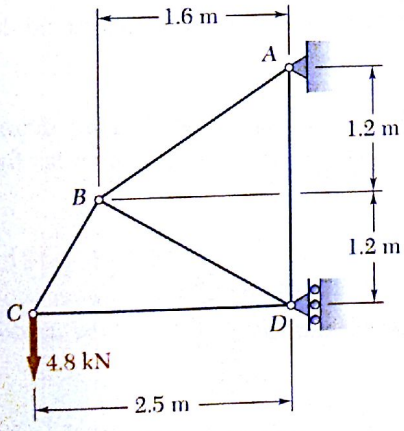



**Figura P11.103 y *P11.104***

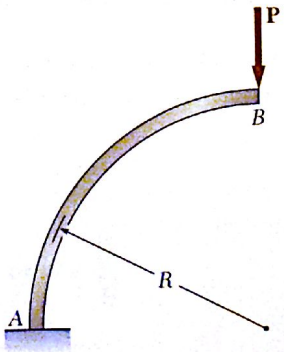



**Figura P11.105**

**11.105** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine por medio del teorema de Castigliano *a*) la deflexión horizontal del punto $B$, *b*) la deflexión vertical del punto $B$.

**11.106** Para la varilla uniforme y la carga que se muestran en la figura, determine por medio del teorema de Castigliano la deflexión del punto $B$.

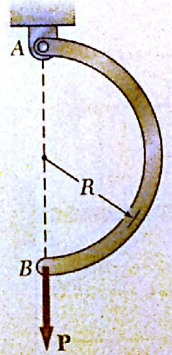



**Figura P11.106**

**11.107** Dos barras $AB$ y $BC$, que tienen la misma rigidez a la flexión $EI$, se sueldan en el punto $B$. Para la carga que se muestra en la figura, determine *a*) la deflexión en el punto $C$, *b*) la pendiente del elemento $BC$ en el punto $C$.

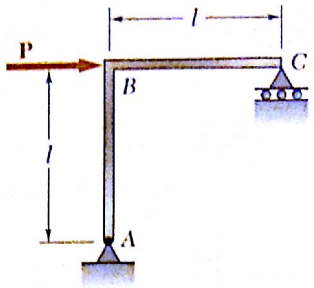



**Figura P11.107**

***11.108*** Una barra uniforme con rigidez a la flexión $EI$ está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión horizontal del punto $D$, *b*) la pendiente en el punto $D$.

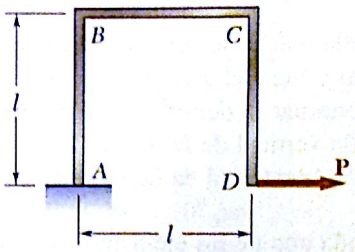



**Figura *P11.108* y P11.109**

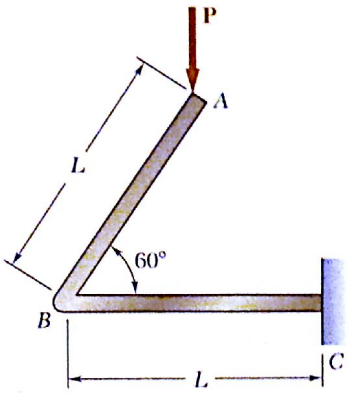



**Figura *P11.110***

**11.109** Una barra uniforme con rigidez a la flexión $EI$ está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión vertical del punto $D$, *b*) la pendiente $BC$ en el punto $C$.

***11.110*** Una barra uniforme con rigidez a la flexión $EI$ está doblada y soporta una carga como se indica en la figura. Determine *a*) la deflexión vertical del punto $A$, *b*) la deflexión horizontal del punto $A$.

**11.111 a 11.114** Determine la reacción en el apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en las figuras.

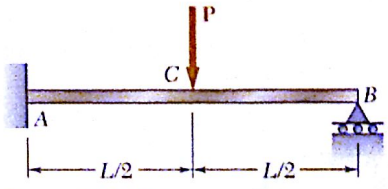



**Figura P11.111**

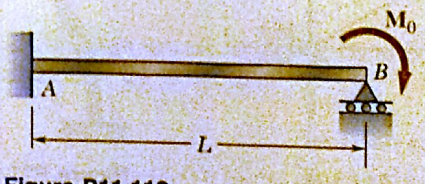



**Figura P11.112**

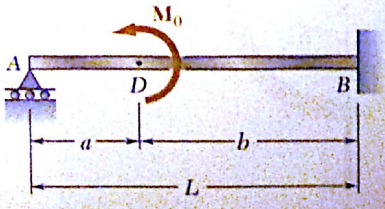



**Figura *P11.113***

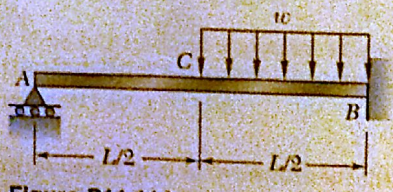



**Figura P11.114**

**11.115** Determine la reacción del apoyo deslizante y dibuje el diagrama de momento flector para la viga y la carga que se muestran en la figura.

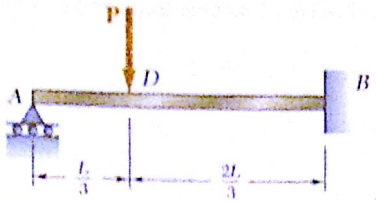



Figura *P11.115*

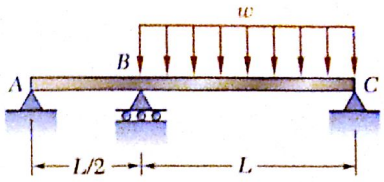



Figura P11.116

**11.116** Para la viga y la carga que se muestran en la figura, determine la reacción en cada apoyo.

**11.117 a *11.120*** Tres elementos del mismo material y con la misma área de sección transversal se utilizan para soportar la carga **P**. Determine la fuerza en el elemento *BC*.

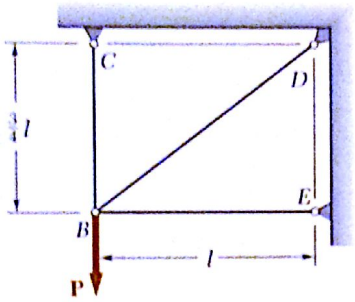



Figura P11.117

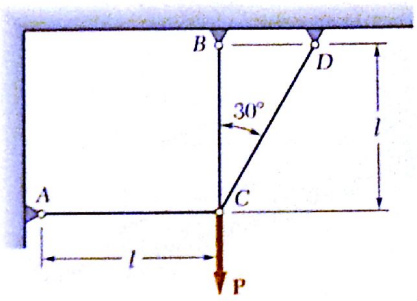



Figura P11.118

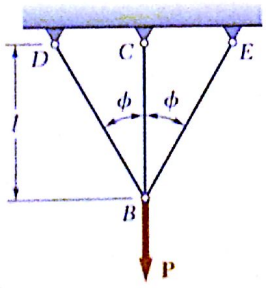



Figura P11.119

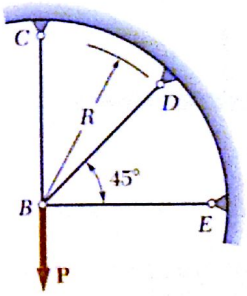



Figura *P11.120*

**11.121 y 11.122** Si se sabe que los ocho elementos de la armadura indeterminada que se muestran en las figuras tienen la misma área en su sección transversal uniforme, determine la fuerza en el elemento *AB*.

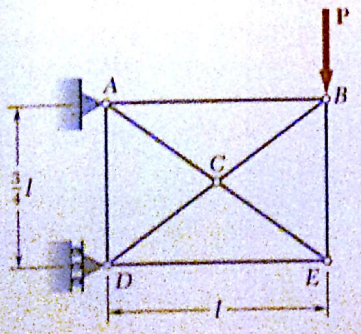



Figura P11.121

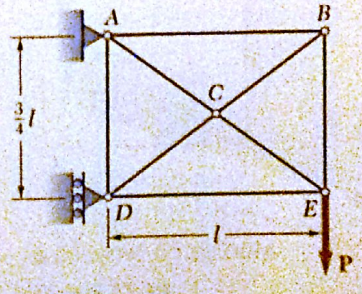



Figura P11.122

# REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 11

En este capítulo se estudió la energía de deformación y la manera como puede usarse para calcular los esfuerzos y las deformaciones en estructuras sometidas a cargas estáticas y de impacto.

En la sección 11.2 se estudió una barra uniforme sujeta a una carga axial lentamente incrementada **P** (figura 11.1). Se observó que el área bajo el diagrama de carga-deformación (figura 11.3) representa el trabajo

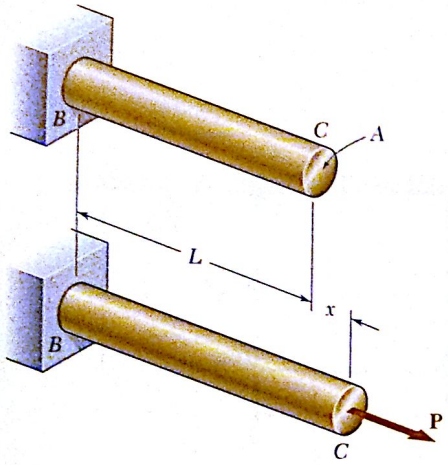



**Figura 11.1**

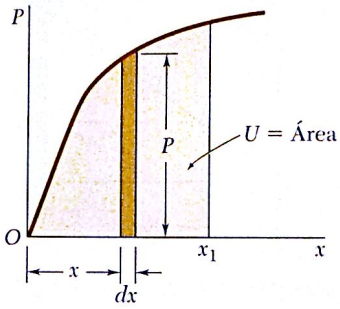



**Figura 11.3**

Energía de deformación

hecho por **P**. Este trabajo es igual a la *energía de deformación* de la barra asociada con la deformación causada por la carga **P**:

$$\text{Energía de deformación} = U = \int_0^{x_1} P\,dx \qquad (11.2)$$

Densidad de energía de deformación

Dado que el esfuerzo es uniforme en la barra, fue posible dividir la energía de deformación entre su volumen y obtener la energía de deformación por unidad de volumen o *densidad de energía de deformación* del material [sección 11.3]. Se encontró que:

$$\text{Densidad de energía de deformación} = u = \int_0^{\epsilon_1} \sigma_x\,d\epsilon_x \qquad (11.4)$$

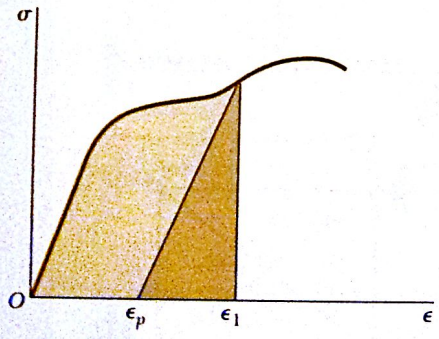



**Figura 11.6**

y se observó que la densidad de energía de deformación es igual al área bajo el diagrama esfuerzo-deformación del material (figura 11.6). Como se vio en la sección 11.4, la ecuación (11.4) es válida cuando los esfuerzos no se distribuyen de manera uniforme, pero la densidad de energía de deformación varía de un punto a otro. Si el material carece de descarga-do, hay una deformación permanente $\epsilon_p$ y sólo la densidad de energía de deformación correspondiente al área triangular se recupera, el resto de la energía se disipa en forma de calor durante la deformación del material.

Módulo de tenacidad

El área bajo el diagrama completo de esfuerzo-deformación se definió como *módulo de tenacidad* y es una medida de la energía total que puede adquirir el material.

Si el esfuerzo normal $\sigma$, permanece dentro del límite proporcional del material, la densidad de energía de deformación $u$ se expresa como

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}$$

El área bajo la curva de esfuerzo-deformación desde cero deformación hasta el esfuerzo de fluencia $\epsilon_Y$ (figura 11.9) es el *módulo de resiliencia* del material y representa la energía por unidad de volumen que el material puede absorber sin fluir. Se escribió

Módulo de resiliencia

$$u_Y = \frac{\sigma_Y^2}{2E} \tag{11.8}$$

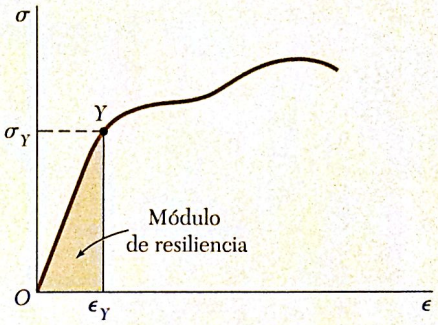


**Figura 11.9**

En la sección 11.4 se aplicó la energía de deformación asociada con *esfuerzos normales*. Se analizó que si una barra de longitud $L$ y *sección transversal variable de área* $A$ se somete en su extremo a una carga axial céntrica **P**, la energía de deformación de la barra es

$$U = \int_0^L \frac{P^2}{2AE}\,dx \tag{11.13}$$

Si la barra es de *sección transversal uniforme* de área $A$, la energía de deformación es

Energía de deformación bajo carga axial

$$U = \frac{P^2L}{2AE} \tag{11.14}$$

Igualmente se concluyó que la energía de deformación asociada con esfuerzos normales, para una viga con cargas transversales (figura 11.15), es

Energía de deformación debida a flexión

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\,dx \tag{11.17}$$

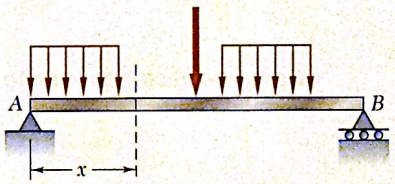


**Figura 11.15**

donde $M$ es el momento flector y $EI$ la rigidez flexional de la viga.

La energía de deformación asociada con *esfuerzos cortantes* se consideró en la sección 11.5. Se observó que la densidad de energía de deformación para un material a cortante puro es

Energía de deformación debido a esfuerzos cortantes

$$u = \frac{\tau_{xy}^2}{2G} \tag{11.19}$$

donde $\tau_{xy}$ es el esfuerzo cortante y $G$ el módulo de rigidez del material.

Para un eje de longitud $L$ y sección transversal uniforme sometido en sus extremos a pares de magnitud $T$ (figura 11.19) la energía de deformación era

Energía de deformación por torsión

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \tag{11.22}$$

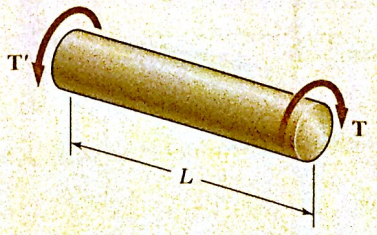


**Figura 11.19**

en donde $J$ es el momento polar de inercia del área de la sección transversal del eje.

Estado general de esfuerzos

En la sección 11.6 se aplicó la energía de deformación de un material elástico isotrópico bajo un estado general de esfuerzo y se expresó la densidad de energía de deformación, en un punto dado, en función de los esfuerzos principales $\sigma_a$, $\sigma_b$ y $\sigma_c$ en ese punto:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_a^2 + \sigma_b^2 + \sigma_c^2 - 2\nu\left(\sigma_a\sigma_b + \sigma_b\sigma_c + \sigma_c\sigma_a\right)\right] \quad (11.27)$$

La densidad de energía de deformación en un punto dado se dividió en dos partes: $u_v$, asociada con un cambio de volumen en ese punto y $u_d$, asociada con la distorsión del material en el mismo punto. Se escribió $u = u_v + u_d$, donde

$$u_v = \frac{1 - 2\nu}{6E}(\sigma_a + \sigma_b + \sigma_c)^2 \quad (11.32)$$

y

$$u_d = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_a - \sigma_b)^2 + (\sigma_b - \sigma_c)^2 + (\sigma_c - \sigma_a)^2\right] \quad (11.33)$$

Se dedujo el criterio de la máxima energía de distorsión usando la expresión para $u_d$, que se utilizó en la sección 7.7 para predecir si un material dúctil fluiría bajo un estado de esfuerzo plano conocido.

Carga de impacto

Carga estática equivalente

En la sección 11.7 se tuvo en cuenta la *carga de impacto* de una estructura elástica golpeada por una masa con velocidad dada. Se supuso que la energía cinética de la masa se transfiere totalmente a la estructura y se definió como *carga estática equivalente* a la que produciría las mismas deformaciones y esfuerzos que los realizados por la carga de impacto.

Luego de analizar algunos ejemplos, se observó que una estructura diseñada para soportar de manera efectiva una carga de impacto debe formarse de tal manera que los esfuerzos estén distribuidos homogéneamente a través de la estructura y que el material utilizado tenga un bajo módulo de elasticidad y un alto límite de fluencia [sección 11.8].

Elementos sometidos a carga única

En la sección 11.9 se consideró la energía de deformación de elementos estructurados sometidos a *carga única*. En el caso de la viga y carga de la figura 11.27, se encontró que la energía de deformación de la viga es

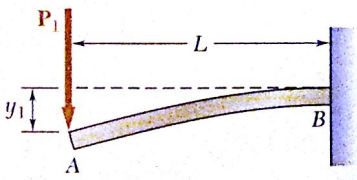


Figura 11.27

$$U = \frac{P_1^2 L^3}{6EI} \quad (11.46)$$

Como el trabajo realizado por la fuerza **P** es igual a $\frac{1}{2}P_1y_1$, se equiparó dicho trabajo a la energía de deformación y se determinó la deflexión $y_1$ en el punto de aplicación de la carga [véase sección 11.10 y ejemplo 11.10].

El método descrito está limitado a las estructuras bajo una fuerza única concentrada y a la determinación de la deflexión en el punto de aplicación de la fuerza. En las siguientes secciones del capítulo, se presentó un método más general, utilizable para calcular deflexiones en varios puntos de estructuras sometidas a varias cargas.

Teorema de Castigliano

En la sección 11.11 se analizó la energía de deformación de una estructura con varias cargas y en la sección 11.12 se introdujo el *teorema de Castigliano*, que establece la igualdad entre la deflexión $x_j$, del punto de aplicación de una carga $\mathbf{P}_j$, medida a lo largo de la línea de acción de $\mathbf{P}_j$, y la derivada parcial de la energía de deformación de la estructura con respecto a $\mathbf{P}_j$. Resultó

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} \tag{11.65}$$

También se estableció que podía aplicarse el teorema de Castigliano para calcular la *pendiente* de una viga en el punto de aplicación de un par $\mathbf{M}_j$ escribiendo

$$\theta_j = \frac{\partial U}{\partial M_j} \tag{11.68}$$

y también el *ángulo de torsión* en una sección de un eje donde se ha aplicado un par de torsión $\mathbf{T}_j$,

$$\phi_j = \frac{\partial U}{\partial T_j} \tag{11.69}$$

En la sección 11.13 se aplicó el teorema de Castigliano para calcular deflexiones y pendientes en diferentes partes de una estructura dada. El uso de variables "ficticias" permitió incluir puntos donde no actuaban fuerzas. Igualmente se observó que el cálculo de una deflexión $x_j$ se facilitaba si la derivación con respecto a la carga $P_j$ se realizaba antes de la integración. En el caso de una viga, recordando la ecuación (11.17), resultó

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial P_j}\,dx \tag{11.70}$$

De manera análoga, para una armadura con $n$ elementos, la deflexión $x_j$ del punto de aplicación de $\mathbf{P}_j$ se escribió como

$$x_j = \frac{\partial U}{\partial P_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_i L_i}{A_i E}\frac{\partial F_i}{\partial P_j} \tag{11.72}$$

Estructuras indeterminadas

El capítulo concluyó [sección 11.14] con la aplicación del teorema de Castigliano al análisis de *estructuras estáticamente indeterminadas* [véase problema modelo 11.7 y los ejemplos 11.15 y 11.16].

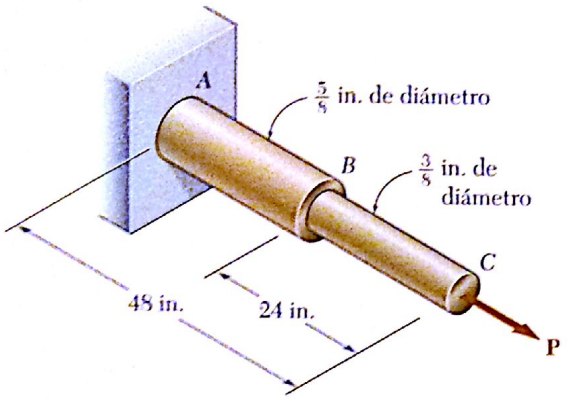



Figura P11.123

**11.123** La barra *AB* está hecha de un acero cuya resistencia a la cedencia es $\sigma_Y = 65$ ksi y su módulo de elasticidad es $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se sabe que la barra puede adquirir una energía de deformación de 60 in. · lb cuando se aplica la carga axial **P**, determine el factor de seguridad de la barra respecto de la deformación permanente.

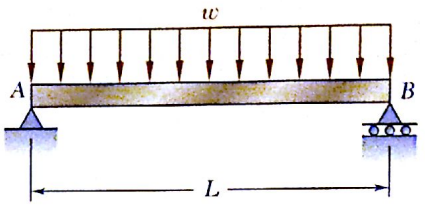



Figura *P11.124*

***11.124*** Determine la energía de deformación de la viga prismática *AB* para la carga que se muestra en la figura. Considere sólo el efecto de los esfuerzos normales.

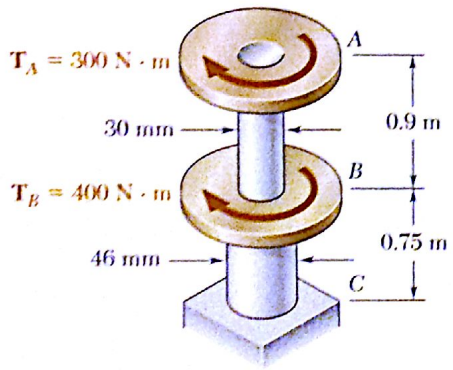



Figura P11.125

**11.125** En el ensamble mostrado en la figura, se ejercen los pares de torsión $\mathbf{T}_A$ y $\mathbf{T}_B$ sobre los discos *A* y *B*, respectivamente. Si se sabe que ambos ejes son sólidos y están hechos de aluminio ($G = 73$ GPa), determine la energía de deformación total adquirida por el ensamble.

***11.126*** Un solo pasador *B* de acero de 6 mm de diámetro se utiliza para conectar las tiras de acero *DE* a dos tiras de aluminio, cada una de las cuales mide 20 mm de ancho y 5 mm de espesor. El módulo de elasticidad es de 200 GPa para el acero y de 70 GPa para el aluminio. Si se sabe que el esfuerzo cortante permisible para el pasador en *B* es $\sigma_{perm} = 85$ MPa, determine, para la carga mostrada en la figura, la máxima energía de deformación que puede asimilar el ensamble de tiras.

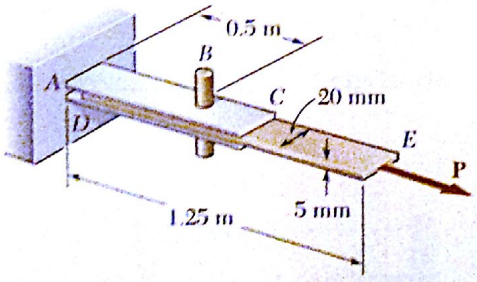



Figura *P11.126*

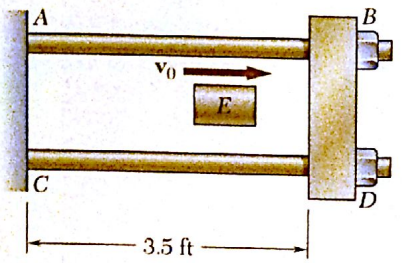



Figura P11.127

**11.127** El bloque cilíndrico *E* tiene una velocidad $v_0 = 16$ ft/s cuando golpea el yugo *BD* que se encuentra unido a las barras *AB* y *CD* de $\frac{7}{8}$ in. de diámetro. Si se sabe que las barras están hechas de un acero con $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, determine el peso del bloque *E* para el cual se tiene un factor de seguridad de cinco respecto de la deformación permanente de las barras.

**11.128** Un bloque de peso $W$ está en contacto con una viga en algún punto dado $D$ y se suelta. Demuestre que la deflexión máxima resultante en el punto $D$ es dos veces mayor que la deflexión debida a una carga estática $W$ que se aplicará en $D$.

**11.129** La barra de acero $ABC$ de 12 mm de diámetro se ha doblado en la forma que se aprecia en la figura. Si se sabe que $E = 200$ GPa y $G = 77.2$ GPa, determine la deflexión en el extremo $C$ ocasionada por la fuerza de 150 N.

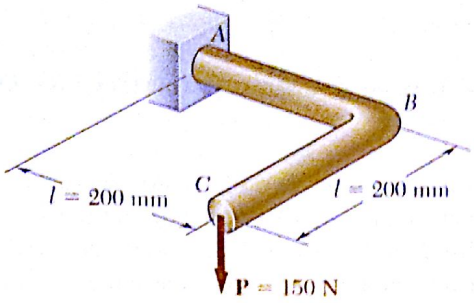



**Figura P11.129**

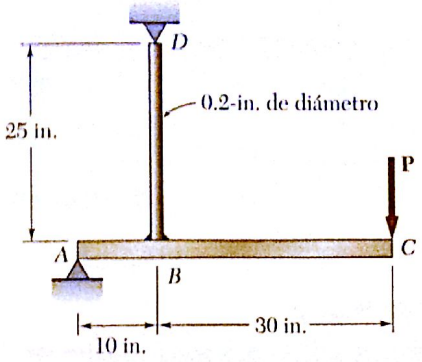



**Figura *P11.130***

***11.130*** La barra de acero $ABC$ tiene una sección transversal cuadrada de 0.75 in. por lado y está sujeta a una carga **P** de 50 lb. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la deflexión del punto $C$.

**11.131** Cada elemento de la armadura que se muestra en la figura está hecho de acero; el área de la sección transversal del elemento $BC$ es de 800 mm$^2$, y todas las áreas de las otras secciones transversales son de 400 mm$^2$. Utilice $E = 200$ GPa para determinar la deflexión del punto $D$ causada por la carga de 60 kN.

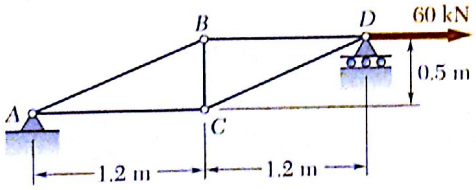



**Figura P11.131**

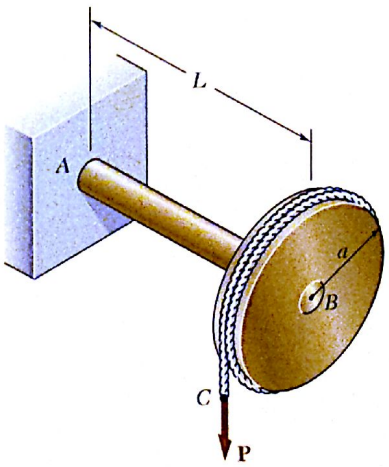



**Figura P11.132**

**11.132** Se ha soldado un disco de radio $a$ al extremo $B$ del eje de acero sólido $AB$. Luego se enrolló un cable alrededor del disco y se aplica una fuerza **P** al extremo $C$ del cable. Si se sabe que el radio del eje es $r$ y se desprecian las deformaciones del disco y del cable, demuestre que la deflexión del punto $C$ ocasionada por la aplicación de **P** es

$$\delta_C = \frac{PL^2}{3EI}\left(1 + 1.5\frac{Er^2}{GL^2}\right)$$

***11.133*** Para la viga prismática que se muestra en la figura, determine la deflexión del punto $D$.

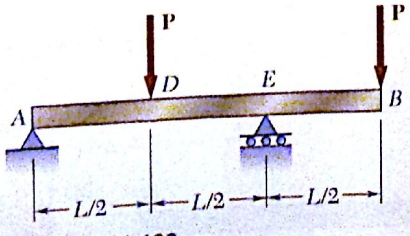



**Figura *P11.133***

**11.134** Tres barras, cada una con la misma rigidez a la flexión $EI$, se sueldan para formar el bastidor $ABCD$. Para la carga que se muestra en la figura, determine el ángulo formado por el bastidor en el punto $D$.

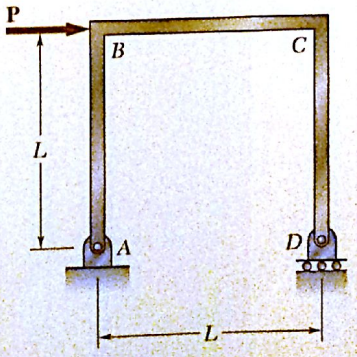



**Figura P11.134**